Всероссийская олимпиада школьников 2019/2020 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
8 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 00 мин.
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

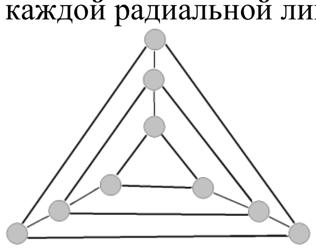
Задание 8.1
Можно ли расставить натуральные числа в клетки таблицы размером 7×7 так, чтобы в любом квадрате 2×2 и любом квадрате 3×3 сумма чисел была нечетна?
Количество баллов 7
Ответ
нельзя
Решение
Предположим, что можно. Рассмотрим в таблице квадрат со стороной 6 клеток. Так как его можно разбить на четыре квадрата размером 3×3, то сумма чисел в этом квадрате будет четной. С другой стороны, этот же квадрат можно разбить на девять квадратов размером 2×2, поэтому эта же сумма окажется нечетной. Противоречие.

Задание 8.2
У натурального числа N выписали все его делители, затем у каждого из этих делителей подсчитали сумму цифр. Оказалось, что среди этих сумм нашлись все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее значение N.
Количество баллов 7
Ответ:
288
Решение
Заметим, что у числа 288 есть делители 1, 2, 3, 4, 32, 6, 16, 8, 9. Поэтому это число удовлетворяет условию задачи. Докажем, что меньшего числа, удовлетворяющего условию, не существует.

Действительно, так как N должно иметь делитель с суммой цифр 9, то N делится на 9. Рассмотрим теперь делитель d с суммой цифр 8. d не делится на 3, поэтому числа d и 9 – взаимно простые, значит, N делится на 9d. При этом, если $d \geq 32$, то $9d \geq 288$, то есть 3 $N \geq 288$. Значит, остается проверить $d = 26$, $d = 17$ и $d = 8$.
Если $d = 26$, то $9d = 234$. У этого числа нет делителя с суммой цифр 5, а любое число, ему кратное, больше, чем 288.
Если $d = 17$, то $9d = 153$. У этого числа нет делителя с суммой цифр 2, а любое число, ему кратное, больше, чем 288.
Если $d = 8$, то $9d = 72$. Ему кратные и меньшие, чем 288 – это 144 и 216. Но у этих чисел нет делителя с суммой цифр 5.

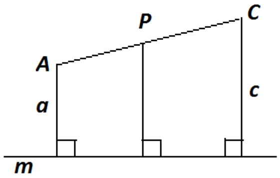
Дополнительные критерии проверки.
«2 или 3 балла» Приведен только верный ответ

Задание 8.3
Можно ли в кружки на рисунке вставить числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 так, чтобы на каждой радиальной линии и в каждом треугольнике сумма чисел была одна и та же?



Количество баллов 7
Ответ:
нельзя
Решение
Пусть S – эта сумма, тогда $6S = 2(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81)$.
Т.к. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81= 285$,
то $6S = 570$, $S = 95$.
Но к сумме, содержащей число 81 надо добавить 14 до 95, а среди чисел нет двух с такой суммой. Поэтому расстановка невозможна.

Задание 8.4
Внутри острого угла расположен выпуклый четырёхугольник ABCD. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин A и C до этой прямой равна сумме расстояний от вершин B и D до этой же прямой. Докажите, что ABCD – параллелограмм.
Количество баллов 7
Решение
Пусть прямая m содержит одну из сторон данного угла, a и c – расстояния от вершин A и C до m, P – середина отрезка AC, тогда расстояние от P до m равно $(a + c)/2$ (средняя линия трапеции, см. рис.).



Аналогично, если Q — середина отрезка BD, b и d – расстояния от вершин B и D до m, то расстояние от Q до m равно $(b + d)/2$.
По условию, $a + c = b + d$, значит, точки P и Q равноудалены от прямой m. Проведя аналогичное рассуждение для прямой n, содержащей другую сторону данного угла, получим,

что P и Q равноудалены от прямой n. Геометрическим местом точек, находящихся от заданной прямой на заданном расстоянии является пара прямых, параллельных заданной. По доказанному выше, точки P и Q принадлежат обоим ГМТ (для прямой m и для прямой n), значит, они принадлежат их пересечению. Но внутри угла пересекаются только две прямые, по одной из каждого ГМТ, поэтому точки P и Q совпадают. Таким образом, диагонали AC и BD данного четырехугольника пересекаются в их общей середине, то есть ABCD – параллелограмм.

Дополнительные критерии проверки.
«2 или 3 балла» Присутствует идея рассмотрения середин диагоналей, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют

Задание 8.5
На острове Лжецов и Рыцарей расстановку по кругу называют правильной, если каждый, стоящий в кругу, может сказать, что среди двух его соседей есть представитель его племени. Однажды 2019 аборигенов образовали правильную расстановку по кругу. К ним подошел лжец и сказал: «Теперь мы вместе тоже можем образовать правильную расстановку по кругу». Сколько рыцарей могло быть в исходной расстановке?
Количество баллов 7
Ответ:
1346
Решение
Докажем, что правильная расстановка по кругу возможна тогда и только тогда, когда рыцарей, по крайней мере, в два раза больше, чем лжецов.
Действительно, из условия задачи следует, что в такой расстановке соседями каждого лжеца являются два рыцаря, а среди соседей любого рыцаря есть хотя бы один рыцарь. Тогда правильная расстановка должна выглядеть так: группа рыцарей, лжец, группа рыцарей, лжец, и так далее (в каждой группе не менее двух рыцарей). Значит, при такой расстановке рыцарей хотя бы в два раза больше, чем лжецов.
В обратную сторону: если рыцарей в два раза больше, чем лжецов, то делаем расстановку вида РРЛРРЛ..., а оставшихся рыцарей (если они есть) помещаем между любыми двумя рыцарями. Таким образом, если выполняется такое условие, то правильная расстановка возможна.
Пусть в правильной расстановке, указанной в условии, стоят Р рыцарей и Л лжецов, тогда $Р \geq 2Л$. Подошедший лжец сказал неправду, поэтому вместе с ним правильная расстановка невозможна, следовательно, $Р \leq 2Л + 1$. Таким, образом $Р = 2Л$ или $Р = 2Л + 1$. В первом случае, в исходной расстановке $2019\cdot(2/3)= 1346$ рыцарей, а второй случай невозможен, так как число $(2019 – 1)\cdot(2/3)$ не будет целым.

Дополнительные критерии проверки.
«4 или 5 баллов Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, доказано только необходимое условие существования правильной расстановки или допущена вычислительная ошибка в конце)
«2 или 3 балла» ответ получен, исходя из предположения, что рыцарей в два раза больше, чем лжецов, но это не доказано