Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике
8 класс

8.1. В классе 30 учеников. Каждый ученик имеет однотонную футболку и однотонные брюки. Причем и футболки, и брюки ровно 15 различных цветов. Всегда ли найдутся 15 учеников, у любых двух из которых разные по цвету футболки и разные по цвету брюки?

Ответ. Не всегда.

Решение. Можно построить пример, что даже трех учеников, удовлетворяющих условию, можно не найти. Пусть 15 учеников имеют футболки разных цветов и брюки одного цвета, а 15 оставшихся учеников имеют брюки разных цветов (среди них есть и тот цвет, который был у брюк первых 15 учащихся) и футболки одного цвета (этот цвет встречался и среди футболок первых 15 учащихся). Тогда среди любых трех учеников двое будут либо из группы с футболками разных цветов, либо из группы с брюками разных цветов, но тогда эти двое имеют либо брюки, либо футболки одного цвета.

8.2. Вика и Маша решили украсить комнату шариками. Они купили 15 упаковок шариков. В каждой упаковке находится 1, 2, 3, …, 15 шариков соответственно (количество шариков на упаковке написано). Чтобы не было скучно надувать шарики, девочки придумали игру: они по очереди берут и надувают по одному шарику из любой упаковки, вскрывая если нужно новую упаковку. Проигрывает та, которая последней вскроет упаковку. Какая из девочек сможет гарантированно выиграть, независимо от игры соперницы, если первой берет шарик Вика?

Ответ. Маша.

Решение. Вика вначале распечатывает упаковки с четным числом шариков. На это ей понадобится максимум 7 ходов (если Маша тоже будет вскрывать такие упаковки, то ходов потребуется меньше). Так как упаковок с нечетным числом шариков больше, то, по крайней мере, одна из них останется нераспечатанной – она распечатывается в последнюю очередь. В остальных коробках суммарно нечетное число шариков, поэтому они закончатся после хода Вики, и последнюю упаковку вскроет Маша.

8.3. Найдите целочисленные решения системы:

$$\begin{cases} ab + c = 94, \\ a + bc = 95. \end{cases}$$

Ответ. $a=95$, $b=0$, $c=94$ или $a=31$, $b=2$, $c=32$.

Решение. Вычитая их второго уравнения первое, получим:

$$(a - c)(1 - b) = 1.$$

Так как a, b, c – целые числа, то возможны два случая:

1) $a - c=1$, $1 - b=1$, т.е. $b=0$. Подставив в систему, получим $c=94$, $a=95$.

2) $a - c = -1$, $1 - b = -1$, т.е. $c = a + 1$, $b = 2$. Поставляя b и c в первое уравнение, получим $a = 31$, откуда $c = 32$.

8.4. Окружность с центром на стороне NP остроугольного треугольника MNP проходит через N и P, а стороны MN и MP пересекает в точках T и Q соответственно. При этом $MT = MQ$. Докажите, что треугольник MNP равнобедренный.

Доказательство. Точка O – середина отрезка NP и центр данной окружности. Так как треугольники MTQ и OTQ равнобедренные, то $\angle MTQ = \angle MQT$, $\angle OTQ = \angle OQT$, поэтому $\angle OQM = \angle OTM$, $\angle OQP = \angle OTN$. Из равнобедренности треугольников OPQ и OTN следует, что $\angle OPQ = \angle OQP = \angle OTN = \angle ONT$, т.е. $\angle MPN = \angle MNP$, что и требовалось доказать.

8.5. По кругу стоит 44 вазы с цветами. Количество цветов в любых двух соседних вазах отличается ровно на 1 цветок. Если Маша находит две вазы, в которых одинаковое число цветов, то она забирает себе цветы из обеих ваз. Докажите, что Маше достанутся цветы не менее чем из 28 ваз.

Доказательство. Мысленно сгруппируем вазы, в которых поровну цветов. При этом ваз, содержащих максимальное и минимальное число цветов, может быть по одной, но в каждой из остальных групп ваз не меньше двух. В самом деле, если отметить по вазе с наибольшим и наименьшим числом цветов, то на каждой из двух дуг, на которые эти вазы разбивают окружность, каждое из промежуточных значений принимается хотя бы по разу. Теперь сосчитаем, сколько вазочек в каждой группе. Сумма полученных чисел равна 44, и среди них не больше двух единиц. Очевидно, число ваз, которые останутся полными, равно числу нечетных слагаемых в этой сумме, а наибольшее число нечетных слагаемых получается, когда два из них – единицы, а 14 – тройки. В этом случае нетронутых ваз остается 16, в остальных случаях – больше. Тогда Маше достанутся цветы не менее чем из 28 ваз.

Пример размещения цветов в вазах: 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5…, 14, 15, 14, 15, 14, 15, 16.

Комментарий. Доказательство без примера оценивается в 5 баллов.