МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2019/2020 УЧЕБНЫЙ ГОД
9 КЛАСС (решения)

1. (*7 баллов*) Вычислите $\frac{(2009\cdot 2029+100)\cdot(1999\cdot 2039+400)}{2019^4}$.

Решение.

$2009\cdot 2029+100=(2019-10)\cdot(2019+10)+100=2019^2-10^2+100=2019^2.$

$1999\cdot 2039+400=(2019-20)\cdot(2019+20)+400=2019^2-20^2+400=2019^2.$

Тогда $\frac{2019^2\cdot 2019^2}{2019^4}=1.$

Ответ. 1.

2. (*7 баллов*) Найдите все натуральные решения уравнения $2n-\frac{1}{n^5}=3-\frac{2}{n}$.

Решение.

<u>1 способ.</u> $2n-\frac{1}{n^5}=3-\frac{2}{n},\ 2n-3=\frac{1}{n^5}-\frac{2}{n},\ 2n-3=\frac{1-2n^4}{n^5}.$

При $n=1$ равенство верно, при $n>1$ $2n-3>0,\ \frac{1-2n^4}{n^5}<0.$

Ответ. $n=1.$

3. (*7 баллов*) Путешественник ехал в автобусе и увидел, что на километровом столбе написано двузначное число. Он уснул, а через час проснулся и увидел, что на километровом столбе написано трёхзначное число, первая цифра которого такая же, как вторая цифра час тому назад, вторая цифра – ноль, а третья – такая же, как первая цифра час тому назад. Ещё через 2 часа он выглянул в окно и увидел километровый столб, на котором было число такое же, как 2 часа назад, только цифра ноль заменилась иной цифрой. Найдите скорость автобуса (считаем, что он двигался с постоянной скоростью).

Решение. Пусть в первый раз путешественник увидел число $\overline{xy}=10x+y$. Через час число стало $\overline{yox}=100y+x$. Через 2 часа $\overline{yzx}=100x+10z+x$. Так как скорость автобуса постоянна, то $\overline{yox}-\overline{xy}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{yzx}-\overline{yox})$, то есть

$100y+x-10x-y=\frac{1}{2}\cdot(100y+10z+x-100y-x), 9\cdot(11y-x)=5z.$

Так как левая часть делится нацело на 9, то и правая часть делится нацело на 9. Следовательно, $z=9$, а скорость автобуса равна $5\cdot z$ и равна 45 км/ч.
Ответ. 45 км/ч.

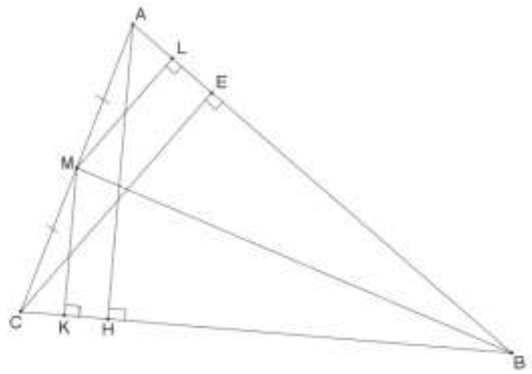
4. (*7 баллов*) Назовём шахматную доску 8×8, где между некоторыми клетками вставлены перегородки, лабиринтом. Лабиринт считается «хорошим», если ладья может обойти все поля доски, не прыгая через перегородки, иначе лабиринт считается «плохим». Каких лабиринтов больше: «хороших» или «плохих»?

Решение. Назовём лабиринт «хорошим по данной клетке», если из этой клетки ладья может хоть куда-нибудь сделать ход. Для того, чтобы лабиринт был хорошим, необходимо, чтобы он был хорошим по каждой своей клетке (достаточным условием это не является).
Рассмотрим одну из угловых клеток. Существуют четыре способа поставить перегородки на границе этой клетки: нет перегородок, есть только вертикальная, есть только горизонтальная, есть обе перегородки. Таким образом, среди всех лабиринтов $\frac{3}{4}$ – хороших по одной угловой клетке.

Рассуждая аналогично, получим, что среди всех лабиринтов хороших одновременно по двум угловым клеткам – $\frac{9}{16}$, а хороших одновременно по трём угловым клеткам – $\frac{27}{64}$, а это уже меньше половины всех лабиринтов.

Аналогичное рассуждение можно проводить для плохих лабиринтов, доказывая, что их больше половины.
Ответ. Плохих лабиринтов больше.

5. (*7 баллов*) В остроугольном треугольнике ABC высота AH, наибольшая из высот, равна медиане BM. Докажите, что угол $\angle ABC$ меньше 60^0.
Решение.



Опустим из точки M перпендикуляры на стороны BC и AB.

$MK = \frac{1}{2}AH$, по условию, $AH = BM$.

Следовательно, $MK = \frac{1}{2}BM$, $\angle CBM = 30^0$.

Аналогично, $ML = \frac{1}{2}CE$, где CE − высота, проведённая из вершины C. Так как по условию высота AH − наибольшая, то $ML = \frac{1}{2}CE < \frac{1}{2}AH$.

Следовательно, $ML < \frac{1}{2}BM$, $\angle MBA < 30^0$.

Следовательно, $\angle ABC = \angle CBM + \angle MBA < 30^0 + 30^0$.

Значит, $\angle ABC < 60^0$.

Максимальное количество баллов – 35.