9 класс.

1. Иван и Петр бегут в одном направлении по круговым дорожкам с общим центром, причем вначале они находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Иван делает один полный круг каждые 20 секунд, а Пётр делает один полный круг каждые 28 секунд. Через какое наименьшее время они будут находиться на максимальном расстоянии друг от друга?

Ответ: 35 секунд.

Решение. Иван и Петр будут на минимальном расстоянии друг от друга в стартовых точках через НОК (20, 28) = 140 сек. За это время Иван сделает 7 кругов, а Петр - 5 кругов относительно точки старта. Рассмотрим это движение в системе отсчёта, где Петр неподвижен, тогда Иван сделает 2 круга. Следовательно, через 140: 4 = 35 секунд Иван пробежит половину круга. В этот момент они впервые будут на максимальном расстоянии друг от друга.

Критерии. Только ответ: 1 балл.

2. Числа a и b не меньше 3. Доказать, что верно неравенство . При каких значениях a и b достигается равенство?

Решение. Изучим разность правой и левой частей неравенства

так как $a \geq 3$ и $b \geq 3$. Равенство достигается при $a=3$ и b удовлетворяющем неравенству $b \geq 3$, и при $b=3$ и а удовлетворяющем неравенству $a \geq 3$.

Критерии. Неравенство доказано, но не указано, когда достигается равенство или указано неверно: 6 баллов.

3. Найти все функции *f*, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных *x* и *y* выполняется равенство $f(xy)=f(x)f(y)+2xy$.

Ответ: Таких функций нет.

Решение. Подставим вместо x и y единицу. Тогда $f(1)=f(1)^2+2$. Значит, $f(1)=a$ - корень квадратного уравнения $a^2-a+2=0$. Его дискриминант равен $1^2-4\cdot 2=-7<0$. Уравнение корней не имеет, и значит такой функции нет.

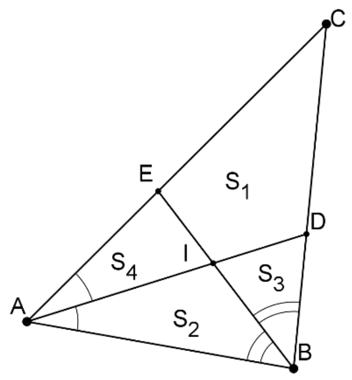
Критерии. Ответ без обоснования: 0 баллов.

4. Рациональные числа *a*, *b* и *c* таковы, что $(a+b+c)(a+b-c)=2c^2$. Доказать, что $c=0$.

Решение. Начальное равенство равносильно следующему $(a+b)^2-c^2=2c^2$, или $(a+b)^2=3c^2$. Если $c\neq 0$, то получаем $((a+b)/c)^2=3$. $|(a+b)/c|=$. Слева стоит рациональное число, поскольку сумма, частное и модуль рациональных чисел - число рациональное, а справа – иррациональное, и равенство невозможно. Значит, $c=0$.

Критерии. Получено равенство $(a+b)^2=3c^2$, дальнейших продвижений нет: 1 балл.

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что $CA \cdot CB = AB^2$. Доказать, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE.



Решение. Пусть $S(CDIE)=S_1$, $S(ABI)=S_2$, $S(BDI)=S_3$, $S(AIE)=S_4$ (см. рис.). Так как отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению оснований, а биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон, имеем $(S_1+S_4)/(S_2+S_3)=CD/BD=AC/AB$. Аналогично $(S_2+S_4)/(S_1+S_3)=AE/EC=AB/BC$. Из равенства в условии следует $AC/AB=AB/BC$. Откуда $(S_1+S_4)/(S_2+S_3) = (S_2+S_4)/(S_1+S_3)$. По основному свойству пропорций $(S_1+S_4)(S_1+S_3)=(S_2+S_4)(S_2+S_3)$. Раскрыв скобки, перенеся слагаемые в одну сторону и разложив на множители, получим $(S_1-S_2)(S_1+S_2+S_3+S_4)=0$. Второй множитель положителен, и, значит, $S_1-S_2=0$ или $S_1=S_2$.

6. В одной компании среди любых 9 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из восьми человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Решение. Рассмотрим наибольшую группу G попарно незнакомых между собой людей. В ней не более восьми человек, иначе среди них есть девять человек, среди которых нет двух знакомых, что противоречит условию. Так как это максимальная группа, то любой из остальных знаком с кем-то из этой группы. В случае необходимости добавим в неё несколько человек, чтобы в ней стало восемь человек, и получим группу из восьми человек, так что остальные знакомы с кем-нибудь из этой группы.

Критерии. Рассмотрение частного случая: 0 баллов.