Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

9.1. Карлсон пересчитывает 1000 плюшек, которые испекла Фрекен Бок: «один, два, три, …, девятьсот девяносто восемь, девятьсот девяносто девять, тысяча». Сколько всего слов он произнесет? (Каждое слово считается столько раз, сколько раз оно было произнесено.)

Ответ: 2611.

Решение. Одно слово потребуется для произношения 37-ми чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000.

Среди первых 99 чисел количество произносимых в два слова: $99 - 27 = 72$, соответственно, количество слов для их произнесения $2 \cdot 72 = 144$.

В каждой следующей сотне (их 9) каждое число, произносимое в первой сотне в одно слово, будет произноситься в два, и количество слов: $9 \cdot 2 \cdot 27 = 486$. Остальные произносятся в три слова: $9 \cdot 3 \cdot (99 - 27) = 1944$.

То есть для пересчета всех плюшек понадобится $37 + 144 + 486 + 1944 = 2611$ слов.

<u>Критерии.</u>

1 балл. Обоснованно найдено количество чисел произносимых одним словом.

2 балла. Верно и обоснованно найдено количество слов необходимых, чтобы произнести числа от 1 до 99.

2 балла. Верно и обоснованно найдено количество слов необходимых, чтобы произнести числа в любой сотне после 100.

Комментарий. Баллы по критериям выше суммируются.

3 балла. Верный ответ без обоснований.

9.2. При каких значениях q квадратное уравнение $x^2 - 12x + q = 0$ имеет два различных корня, один из которых является квадратом другого?

Ответ: –64 или 27.

Решение. Пусть корни уравнения есть a и a^2. По теореме Виета $a + a^2 = 12$ и $a \cdot a^2 = q$. Решив квадратное уравнение относительно a, находим, что $a = -4$ или $a = 3$. Так как $q = a^3$, то $q = -64$ или $q = 27$.

<u>Критерии.</u>

7 баллов. Верное решение с верным ответом.

2 балла. Верно применена теорема Виета и составлена система из двух уравнений.

1 балл. Только верный ответ.

9.3. Расставьте в клетки таблицы 5×5 целые числа так, чтобы сумма чисел во всей таблице была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 3×3 была отрицательной.

Ответ: Например,

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	-10	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

.

Критерий.

7 баллов. Любой верный пример.

Комментарий. Существует несколько различных правильных примеров.

9.4. Натуральные числа от 1 до 100 выписаны по одному на карточках. Вася составляет наборы из трех карточек так, чтобы в каждом наборе одно из чисел равнялось произведению двух других. Какое наибольшее количество таких наборов могло получиться у Васи? (Одна и та же карточка не может входить в два набора.)

Ответ: 8 наборов.

Решение.

Оценка. Очевидно, что в каждом наборе должно быть хотя бы одно однозначное число, так как произведение двух различных двузначных чисел больше 100. Число 1 нельзя включить ни в один набор, так как все имеющиеся у нас числа различны. Тогда можно составить не более 8 наборов.

Пример. 8 наборов составить можно. Например, (9, 11, 99), (8, 12, 96), (7, 13, 91), (6, 14, 84), (5, 15, 75), (4, 16, 64), (3, 17, 51), (2, 18, 36).

Критерии.

7 баллов. Верное решение с верным ответом.

3 балла. Есть оценка, что наборов не более 8, но нет примера.

3 балла. Есть пример на 8, но нет оценки.

0 баллов. Только верный ответ.

9.5. Полуокружность с диаметром AB и центром в точке O разделена точками C и D на три части так, что точка C лежит на дуге AD. Из точки D на отрезки OC и AB опущены перпендикуляры DE и DF соответственно. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC, а DO – биссектриса треугольника ADF. Найдите угол CAD.

Ответ: 20°.

Решение. Треугольник AOD равнобедренный ($OD = OA$, как радиусы), значит, $\angle OAD = \angle ODA$. Поскольку DO – биссектриса угла ADF, то $\angle OAD = \angle ODF$. Подсчёт углов в прямоугольном треугольнике AFD показывает, что $\angle OAD = 30°$. Обозначим за G точку пересечения отрезков AD и OC. Отрезок DE является высотой и биссектрисой в треугольнике DGC. Тогда треугольник DGC – равнобедренный с углом ECD при основании. Треугольник OCD также является равнобедренным с углом ECD при основании, следовательно, углы при вершинах этих двух треугольников также будут равны, т. е. $\angle CDG = \angle COD$. Пусть $\angle CDG = \angle COD = a$, тогда $\angle GCD = \angle ODC = 30° + a$. Подсчитав сумму углов треугольника COD, получим, что $a = 40°$. Искомый угол CAD вписанный и опирается на ту же дугу, что и центральный угол DOC, поэтому $\angle CAD = 20°$.

Критерии.

7 баллов. Приведено полное обоснованное решение

2 балла. Найдено только значение ∠OAD.