Всероссийская олимпиада школьников 2019/2020 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
9 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин.
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

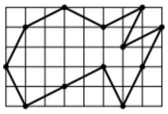
Задание 9.1
Все трехзначные числа записаны в ряд: 100 101 102 ... 998 999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?
Количество баллов 7
Ответ:
19
Решение
Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20. Таких чисел 9: 120, 220, ..., 920. Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, ..., 209. Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.

Задание 9.2
Сумма квадратов n простых чисел, каждое из которых больше 5, делится на 6. Докажите что и n делится на 6.
Количество баллов 7
Решение
Если сумма нескольких чисел делится на шесть, то и сумма их остатков при делении на шесть тоже будет делится на 6. Простое число, большее пяти, может иметь при делении на 6 только остатки 1 или 5 (иначе это число будет делиться на 2 или 3). Следовательно, квадрат любого простого числа,

большего чем 5, имеет при делении на 6 остаток 1. Так как сумма этих остатков равна количеству чисел n, значит n делится на 6.

Задание 9.3

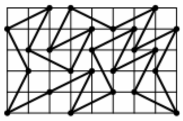
Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображён пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.

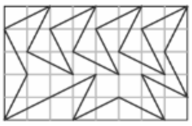


Количество баллов 7

Ответ:

см. рисунки





Задание 9.4

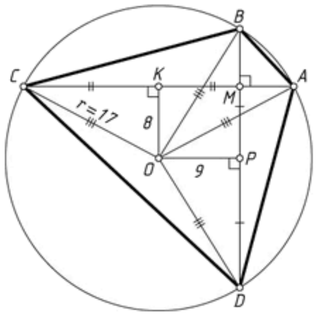
В окружность радиуса 17 вписан четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найдите стороны четырёхугольника.

Количество баллов 7

Ответ:

$4(2\sqrt{13}\pm 1)$, $4(8\pm 2\sqrt{13})$

Решение



Пусть *O* – центр описанной окружности четырёхугольника *ABCD, M* – точка пересечения его диагоналей, *K* и *P* – середины *AC* и *BD, OK* = 8, *OP* = 9. Предположим, что *M* находится между *P* и *B*, а *K* – между *M* и *C*. Тогда $CK^2 = OC^2 - OK^2 = 225$, $DP^2 = OD^2 - OP^2 = 208 = 16\cdot 13$, $CM = CK + KM = CK + OP = 24$, $BM = BP - MP = 4\sqrt{13}-8$,

$BC = \sqrt{CM^2 + BM^2} = \sqrt{848 - 64\sqrt{13}} = 4(2\sqrt{13}-1)$

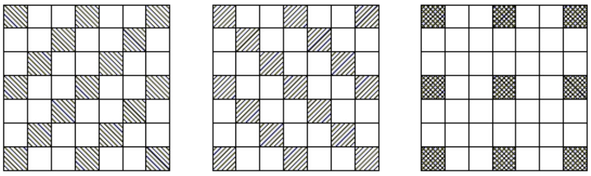
Остальные стороны находятся аналогично.

Задание 9.5

В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3 и одна плитка размером 1×1. Докажите, что плитка размером 1×1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.

Количество баллов 7

Решение



Раскрасим квадрат 7×7 так, как показано на рис. слева. Каждая плитка 1×3 закрывает ровно одну заштрихованную клетку. Поскольку плиток 1×3 всего 16, а заштриховано 17 клеток, плитка 1×1 лежит на заштрихованной клетке. Повторив то же рассуждение для раскраски, показанной на рис. в центре, получаем, что плитка 1×1 лежит на одной из клеток, показанных двойной штриховкой на рис. справа, что и требовалось доказать.