Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2019-2020 учебный год

Решения

9 класс

1. *Решение*. Предположим, что среди этих чисел есть неположительное число. Отложим его в сторону, остальные 8 чисел разобьем на две группы по 4 числа. К группе с наименьшей суммой (или к любой группе, если суммы равны) добавим отложенное число. Таким образом мы нашли 5 чисел, сумма которых не больше суммы оставшихся четырех. Противоречие.
2. *Решение*. Заметим, что $(ab + cd) + (ad + bc) = (a + c)(b + d)$ делится на $(a + c)$, а так как $(ab + cd)$ делится на $(a + c)$, то и $(ad + bc)$ делится на $(a + c)$.
3. *Ответ: 114.*
   Решение.
   Так как меньше любого четного числа есть нечетное количество чисел, то напротив него должно стоять какое-то число, меньшее его.
   Тогда напротив числа 2 должно стоять число 1.
   Напротив числа 4 должно стоять число 3 (так как 1 и 2 стоят друг напротив друга, а чисел меньших 4 больше нет)
   Аналогично рассуждая, получаем, что напротив числа 6 стоит число 5, напротив числа 8 стоит число 7, …, напротив числа 114 стоит число 113.
4. *Решение*. Пусть точка O — середина AC. Так как $AB = BC$, то $BO \perp AC$, аналогично $DO \perp AC$, то есть точки B, O, D лежат на одной прямой.
   Так как точка K лежит на окружности, описанной около треугольника BCD, она не может лежать на отрезке CO, значит она лежит на отрезке AO.
   Пусть $\angle BAK = \angle ABK = a$.

   Из суммы углов прямоугольного треугольника ABO: $\angle KBO = 90° - 2a$.
   Так как BO — высота и биссектриса равнобедренного треугольника ABC: $\angle ABO = \angle CBO = 90° - a$.
   $\angle BKC = 2a$, как внешний угол треугольника ABK.
   $\angle CKD = \angle DBC = 90° - a$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.
   В вписанном четырехугольнике $KBCD$ сумма углов K и C равна 180°, тогда
   $\angle BCD = 180° - 2a - (90° - a) = 90° - a = \angle CBD$. Треугольник BCD — равнобедренный, $BD = CD$, что и требовалось доказать.
5. *Ответ: не мог.*
   Решение. Предположим, что такое могло быть.
   Тогда, так как путь замкнут, путь коня можно начинать с любой клетки пути. Начнем с верхней горизонтали. Чтобы добраться до нижней горизонтали, он должен сделать минимум 4 хода и чтобы потом вернуться назад, еще минимум 4 хода. Из этого следует, что спускался он и поднимался ровно за 4-е хода. Но тогда среди четырех ходов, за которые он спускался вниз, должно быть 3 «вертикальных» хода. (Если пронумеровать горизонтали сверху вниз от 1 до 8, то конь должен был увеличить номер горизонтали, на которой находится, на 7. Каждый «вертикальный» ход изменяет номер горизонтали на 2, а каждый «горизонтальный» ход — на 1. Число 7 при помощи четырех слагаемых 1 и 2 можно набрать только 1+2+2+2=7)
   Всего получается конь должен был совершить 6 «вертикальных ходов» (три при спуске вниз, и три при подъеме вверх).
   Но, аналогично, он должен был совершить 6 «горизонтальных» ходов (если рассматривать вертикали). И всего ходов получается не менее 12. Противоречие.