Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике
9 класс

9.1. По кругу стоит 2019 ваз. В каждой вазе стоят белые и красные розы. Маша хочет переставить по одному цветку из каждой вазы в следующую за ней по часовой стрелке так, чтобы количество и белых, и красных роз в каждой вазе отличалось от первоначального. Сможет ли она это сделать?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть из вазы V_i в следующую за ней вазу V_{i+1} Маша переставила белую розу, тогда в вазу V_i из предыдущей вазы V_{i-1} (считаем что $V_0 = V_{2020}$) нужно переставить красную, иначе количество красных роз в ней не изменится. Аналогично, если Маша переставляла из вазы красную розу, то в нее нужно переставить белую. Но тогда, начиная с какой-то вазы, мы обойдем круг полностью и цвет переставленной в нее розы (2019 по счету) будет таким же, как и цвет переставленной из нее розы (первой по счету). И в этой вазе количество роз имеющих цвет розы, переставленной на первом шаге не изменится, что противоречит условию.

9.2. Докажите, что неравенство $2a^4 + 2b^4 \geq ab(a+b)^2$ выполняется для любых чисел a и b.

Доказательство.

$$2a^4 + 2b^4 - a^3b - ab^3 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + a^4 - a^3b + b^4 - b^3 =$$
$$= (a^2 - b^2)^2 + (a^3 - b^3)(a - b) = (a^2 - b^2)^2 + (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0,$$

так как все слагаемые неотрицательны. Из неравенства следует доказываемое утверждение.

9.3. Будет ли уравнение $x^{2019} + 2x^{2018} + 3x^{2017} + \cdots + 2019x + 2020 = 0$ иметь целые корни?

Ответ. Нет.

Решение. Если есть целый корень a, то $a < 0$. Пусть $b = -a$, тогда

$-b^{2019} + 2b^{2018} - 3b^{2017} + \cdots - 2019b + 2020 = 0,$

$$2b^{2018} + 4b^{2016} + \cdots + 2020 = b^{2019} + 3b^{2017} + \cdots + 2019.$$

Если $b = 1$, то $2b^{2018} > b^{2019}$, $4b^{2016} > 3b^{2017}$, …, $2020 > 2019b$.

Если $b \geq 2$, то $b^{2019} \geq 2b^{2018}$, $3b^{2017} > 4b^{2016}$, …, $2019b > 2020$.

Следовательно, целых корней нет.

9.4. MM_1 и PP_1 – биссектрисы треугольника MNP. Длины перпендикуляров, опущенных из вершины N на прямые MM_1 и PP_1 равны. Докажите, что треугольник MNP равнобедренный.

Решение. 1 способ. Пусть ND и NE перпендикуляры, опущенные из вершины N на прямые MM_1 и PP_1. Продолжим перпендикуляры NE и ND до пересечения с прямой MP (точки пересечения соответственно T и S). Треугольники NPT и NMS

равнобедренные (биссектрисы PE и MD являются высотами), отсюда $NP = PT$, $NM = MS$ и $NT = 2NE = 2ND = NS$. Из последнего равенства $\angle NTS = \angle NST$. Тогда треугольники NPT и NMS равны. Следовательно, $MN = NP$.

2 способ. Пусть O – точка пересечения биссектрис треугольника MNP. Из равенства прямоугольных треугольников ONE и OND с общей гипотенузой следует, что $\angle NOP_1 = \angle NOM_1$. Отсюда с учетом равенств $\angle P_1OM = \angle M_1OP$ и $\angle MNO = \angle PNO$ следует, что $\angle NMO = \angle NPO$, т.е. $\angle MNP = \angle NPM$.

9.5. Из натуральных чисел от 1 до 1239 выбрали 384 различных числа так, что разность между любыми двумя из них не равна ни 4, ни 5, ни 9. Выбрано ли число 625?

Ответ. Да.

Решение.

Лемма. Среди любых 13 подряд идущих натуральных чисел можно выбрать не более четырех так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9.

Доказательство леммы. Разобьем 13 чисел a, $a + 1$, …, $a + 12$ на 9 групп (из одного или двух чисел) и запишем группы по кругу в следующем порядке: $\{a + 4\}$, $\{a, a + 9\}$, $\{a + 5\}$, $\{a + 1, a + 10\}$, $\{a + 6\}$, $\{a + 2, a + 11\}$,$\{a + 7\}$,$\{a + 3, a + 12\}$, $\{a + 8\}$. Если выбрано 5 или более чисел, то некоторые два из них окажутся в одной группе или в соседних группах. Однако из двух соседних групп можно выбрать не более одного числа. Лемма доказана.

Отметим теперь числа 625, 626, 627, 628, а все остальные числа от 1 до 1239 разобьем на $(1239 – 4)/13 = 95$ групп по 13 последовательных чисел (это возможно, так как 624 делится на 13). Из леммы следует, что в группах по 13 чисел можно выбрать не более $95 \cdot 4 = 380$ чисел требуемым в условии образом. Значит, отмеченные четыре числа (625, 626, 627, 628) выбраны.

Примечание. Внутри каждой группы из тринадцати чисел четыре числа, удовлетворяющие условию задачи выбрать можно. Например, до числа 625 в каждой группе берём числа a + 4, a + 5, a + 6, a + 7, после числа 628 в каждой группе берём числа a + 5, a + 6, a + 7, a + 8. Если этот факт не объяснён, то баллы не снимаются, так как в условии задачи сказано, что описываемый набор чисел существует.