9 класс

9.1. Найдите отношение $\frac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 4 раза больше другого ($ac\neq 0$).

Ответ. $\frac{25}{4}$.

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1=4x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем: $x_1+x_2=5x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=4x_2^2=\frac{c}{a}$. Отсюда $x_2=-\frac{b}{5a}$, и $4x_2^2=\frac{c}{a}=4\left(-\frac{b}{5a}\right)^2=\frac{4b^2}{25a^2}$, то есть $\frac{c}{a}=\frac{4b^2}{25a^2}$. Значит, $c=\frac{4b^2}{25a}$. Поэтому $\frac{b^2}{ac}=\frac{25}{4}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.

9.2. Пусть x, y, z – ненулевые числа. Докажите, что среди неравенств: $x+y>0$, $y+z>0$, $z+x>0$, $x+2y<0$, $y+2z<0$, $z+2x<0$ по крайней мере два – неверные.

Первое решение. Предположим противное. Среди трех ненулевых чисел найдутся два одного знака – пусть это x и y. Тогда одно из неравенств $x+y>0$ и $x+2y<0$ неверно. Если все три числа имеют один знак, то мы таким образом найдем три неверных неравенства. В противном случае среди трех пар (x, y), (y, z), (z, x) найдется пара, в которой первое число отрицательно, а второе положительно; пусть это пара (a, b). Тогда одно из неравенств $a+b>0$ и $a+2b<0$ также неверно, ибо $a+b<a+2b$. Найденные нами неверные неравенства, очевидно, различны.

Второе решение. Предположим, что верно хотя быть пять неравенств. Тогда верны все три неравенства из первых трех и хотя бы два из последних трех, или хотя бы два из первых трех и все три последних неравенства.

В первом случае, не ограничивая общности, считаем, что из последних трех верны четвертое и пятое неравенство. Но тогда $x+2y+y+2z=x+3y+2z<0$. С другой стороны, $x+3y+2z=(x+y)+2(y+z)>0$. Противоречие.

Во втором случае, не ограничивая общности, считаем, что $x+y>0$, $y+z>0$. Но тогда, как и в первом случае, $x+2y+y+2z=x+3y+2z<0$ и $x+3y+2z=(x+y)+2(y+z)>0$. Противоречие.

Таким образом, из указанных неравенств хотя бы два неверные.

Комментарий. Доказано только, что неверно одно неравенство – 2 балла.
Доказано, что все три числа не могут быть одного знака – 1 балл.
Решение предполагает изначально упорядоченность чисел x, y, z – не более 4 баллов.

Замечание 1. Существуют и другие решения.

Замечание 2. Тройка чисел, для которой верными являются четыре из приведенных неравенств, существует. Например: $x=9, y=3, z=-2$. Верными являются первое, второе, третье и пятое неравенства.

9.3. По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй – за 7 минут, третий – за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

Ответ. 157,5 минут.

Решение. Пусть S – длина трассы, тогда скорость первого велосипедиста равна $S/5$, второго – $S/7$, третьего – $S/9$. Поэтому время T до встречи всех велосипедистов определяется равенствами $T\left(\frac{S}{5}-\frac{S}{7}\right)=nS$, $T\left(\frac{S}{7}-\frac{S}{9}\right)=mS$, где n, m – натуральные числа. Отсюда $\frac{n}{m}=\frac{9}{5}$. Наименьшее подходящее n равно 9. Значит, $T\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=9$. Тогда минимальное время есть $T=9\cdot\frac{7\cdot 5}{7-5}=157{,}5$ минут.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 2 балла.
Доказано, что одна из встреч произойдет через $157{,}5\cdot 2=315$ минут – 0 баллов.

Замечание. Первая встреча велосипедистов произойдет не в стартовой точке.

9.4. В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, проведена биссектриса AL. На стороне AB выбрана точка K так, что $AK=AC$. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ALB. Докажите, что углы KCB и ABO равны.

Первое решение. Вписанный угол BAL в два раза меньше центрального угла BOL, значит, $\angle BOL=2\angle BAL=\angle KAC$ (см. рис. 2). Значит, углы KAC и BOL – равные углы при вершинах равнобедренных треугольников KAC и BOL, поэтому $\angle AKC=\angle OBC$. Но угол AKC – внешний для треугольника KBC, поэтому $\angle AKC=\angle ABC+\angle KCB$, в частности $\angle OBC=\angle AKC>\angle ABC$, поэтому точка O лежит по другую сторону от AB, нежели C. С другой стороны, $\angle OBC=\angle ABC+\angle ABO$, откуда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Обозначим углы треугольника $\angle BAC=2\alpha$, $\angle ABC=2\beta$, $\angle ACB=2\gamma$; по условию, $\beta<\gamma$. Тогда $\angle ALB=\angle ACL+\angle LAC=\alpha+2\gamma>90°$, поэтому O лежит по другую сторону от AB, нежели L, и $\angle OBA=\angle OAB=(180°-\angle AOB)/2=\angle ALB-90°=(\alpha+2\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma)=\gamma-\beta$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AKC имеем $\angle ACK=\angle AKC=(180°-\angle KAC)/2=90°-\alpha=\beta+\gamma$, откуда $\angle KCB=\angle ACB-\angle ACK=2\gamma-(\beta+\gamma)=\gamma-\beta=\angle OBA$, что и требовалось.

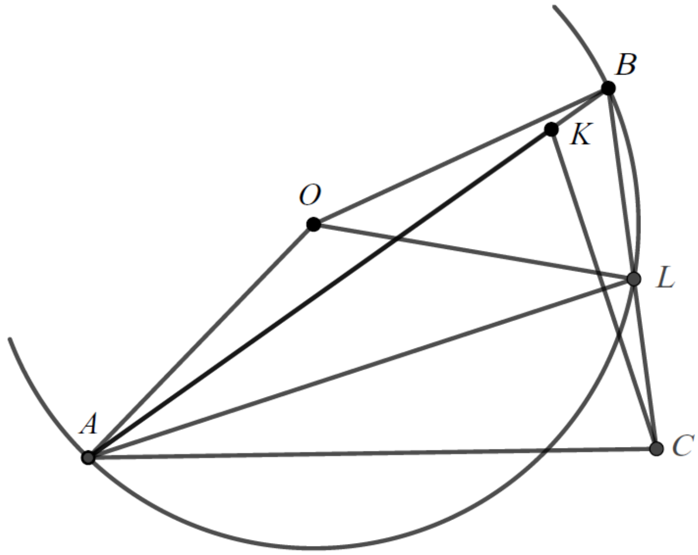

Рис. 2

Комментарий. Доказано, что $\angle BOL = \angle KAC$ – 2 балла.

Замечено, что треугольники KAC и BOL равнобедренные, и доказано, что $\angle AKC = \angle OBC$ – 1 балл.

Используется, но не доказано, что O лежит по другую сторону от AB, нежели C – снять 1 балл.

9.5. Шахматная фигура «кентавр» ходит попеременно как конь и как белая пешка (т.е. строго на одну клетку вверх). Может ли она, начав с некоторой клетки шахматной доски 8×8, обойти все клетки, побывав на каждой клетке ровно по разу, если первый ход она делает как пешка? Стартовая клетка считается обойденной.

Ответ. Не может.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что и пешка, и конь при своем ходе меняют цвет клетки. Пусть кентавр ходом пешки начал обход доски с белой клетки. Тогда он попадет на черную клетку, и следующим ходом (коня) он попадет на белую клетку. Значит, кентавр всегда ходом пешки будет ходить с белой клетки на черную клетку. Однако в нижнем ряду доски есть черные клетки. На них нельзя пойти ходом пешки, так как пешка по правилам ходит только вверх. А конь на эти клетки также попасть не может, поскольку он будет ходить только с черных клеток на белые. Поэтому побывать на всех клетках доски не удастся.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказано, что при шахматной раскраске цвет клеток для хода кентавра как коня (и как пешки) фиксированный – 3 балла.

Замечание 1. Доску нельзя обойти и в случае, когда кентавр первым ходом ходит как конь.

Замечание 2. Существуют и другие решения.