10 класс

10.1.Числа a, b, c удовлетворяют неравенству $c^2 + ab < ca + cb$. Докажите, что $c^2 < a^2 + b^2$.

Решение. Неравенство перепишем в виде $(c-a)(c-b) < 0$. Значит, $a \neq b$, и число c лежит в интервале между a и b. Если a и b одного знака, и, для определенности, $|a|<|b|$, то $|c|<|b|$ $\Rightarrow$ $c^2 < b^2 < a^2 + b^2$. Если a и b разных знаков, то c совпадает по знаку с одним из этих чисел (при $c = 0$ утверждение очевидно); пусть, для определенности – совпадает с числом a. Тогда $c^2 < a^2 < a^2 + b^2$.

10.2. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = a$ и $CB = b$. Найдите **а)** сторону квадрата с вершиной C наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC; **б)** размеры прямоугольника с вершиной C наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC.

Ответ. а) $\frac{ab}{a+b}$; **б)** $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. **Решение. а)** Введем систему координат: начало координат – в вершине C, ось x – вдоль CA, ось y – вдоль CB. Тогда гипотенуза лежит на прямой $y = b - \frac{b}{a}x$. Диагональ квадрата запишется в виде уравнения прямой $y = x$, и поэтому точка пересечения этой прямой с гипотенузой получится из решения указанных уравнений: $x = b - \frac{b}{a}x \Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+b}$. **б)** Пусть x, y – стороны искомого прямоугольника. Пользуясь координатным методом (так же, как в пункте **а**), получим, что точка (x: y) лежит на прямой, проходящей через точки (0; b) и (a; 0), т.е. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Требуется при этом условии найти наибольшее значение площади $S = xy$. Имеем $S = xy = ab \cdot \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}\right) \leq ab \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{ab}{4}$. Здесь мы воспользовались неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим; при этом равенство (наибольшее значение) достигается при $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}$. *Замечание.* Другой способ вычисления наибольшего значения получается при нахождении вершины параболы – графика квадратного трехчлена $S(x) = x\left(b - \frac{bx}{a}\right)$.

10.3. График приведенного квадратного трехчлена (парабола) с целыми коэффициентами касается оси Ox. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами (a,b), что график $y = x^2 + ax + b$ тоже касается оси Ox.

Решение. См. задачу 9.3.

10.4. Дан треугольник со сторонами a,b,c. На его сторонах как на диаметрах построили полукруги во внешнюю сторону и получили фигуру Ф, составленную из треугольника и трёх полукругов. Найдите диаметр Ф (диаметр множества на плоскости – это наибольшее расстояние между его точками).

Ответ. $\frac{a+b+c}{2}$**. Решение.** См. задачу 9.4

10.5. Сколько решений в целых числах x,y имеет уравнение $6x^2 + 2xy + y + x = 2019$**?**

Ответ. 4 решения. **Решение.** Выразим y из данного уравнения: $y = \dfrac{2019 - 6x^2 - x}{2x+1}$**.** Разделив $6x^2+x$ с остатком на $2x+1$, получим $6x^2+x=(3x-1)(2x+1)+1$. Таким образом, выражение для y примет вид: $y = \dfrac{2019-(3x-1)(2x+1)-1}{2x+1} = \dfrac{2018}{2x+1} - 3x + 1$. Следовательно, для того чтобы y было целым числом, нужно, чтобы 2018 делилось на $2x+1$. Так как $2x+1$ – нечетное число, а 2018:2=1009 – число простое, то $2x+1$ может принимать 4 значения: 1, –1, 1009, –1009. Тогда соответствующие значения x и y таковы: (0;2019), (–1;–2014), (504;–1509), (–505;1514).