Решения задач

1. При каких a, b и c прямые $y = ax + b,\ y = bx + c,\ y = cx + a$ проходят через точку (1; 3)?

Решение.

Прямые $y = ax + b,\ y = bx + c,\ y = cx + a$ проходят через точку (1; 3) тогда и только тогда, когда a, b и c удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 3 = a + b, \\ 3 = b + c, \\ 3 = c + a. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем: $9 = 2(a + b + c) \Rightarrow a + b + c = 4{,}5$. Вычитая из последнего равенства поочередно первое, второе и третье уравнения системы, получим: $a = b = c = 1{,}5$.

Ответ: $a = b = c = 1{,}5$.

Указания. Только ответ – 0 баллов; записана система уравнений – 1 балл.

2. Два предпринимателя Анатолий и Владимир построили дорогу 16 км.: Анатолий построил 6, а Владимир – 10 км. Их знакомый Борис сказал, что хотел бы пользоваться дорогой наравне с ними и готов внести свою долю деньгами – 16 миллионов рублей. Как Анатолий и Владимир должны разделить эти деньги между собой?

Решение.

Каждый из компаньонов должен был построить $5\frac{1}{3}$ км. дороги. Анатолий построил вместо Бориса $6 - 5\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ км. дороги, а Владимир построил $10 - 5\frac{1}{3} = \frac{14}{3}$ км. Поэтому деньги нужно разделить между ними в отношении 2:14.

Ответ: Анатолию должно достаться 2 миллиона, а Владимиру – 14 миллионов рублей.

Указание. Только ответ – 0 баллов.

3. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC, $\angle AOC = 60^o$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Так как точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC, градусная мера дуги AC , не содержащей точки B , равна 360^o-60^o=300^o . Поэтому

$\angle ABC$ = (1/2)·300° = 150°. Сумма углов при вершинах A и C треугольника ABC равна 180°-150° = 30° , а т.к. AM и CM – биссектрисы треугольника ABC , то сумма углов при вершинах A и C треугольника AMC равна 15°. Следовательно, $\angle AMC$ = 180° - 15° = 165°**.**

Ответ: 165^0.

Указания. Только ответ – 0 баллов; найден $\angle ABC$ – 1 балл.

4. Положительно или отрицательно число $tg\sqrt{3\pi}+1$?

Решение.

Докажем, что $\dfrac{3\pi}{4}<\sqrt{3\pi}<\pi.$ (1)

Все части неравенств положительны. После возведения в квадрат и сокращения на π получим: $\dfrac{9\pi}{16}<3<\pi.$ Правое неравенство очевидно. Справедливость левого неравенства следует из соотношений: $9\pi<9\cdot 3{,}2=28{,}8<48.$ Неравенства (1) доказаны. На промежутке $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$ тангенс больше –1, следовательно,

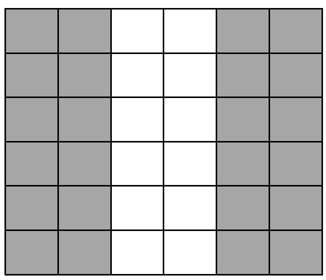
$tg\sqrt{3\pi}+1>0.$

Ответ: положительно.

Указания. Только ответ – 0 баллов; при доказательстве неравенств (1) для π использовано приближенное значение 3,14 (после возведения в квадрат) – 4 балла; квадратный корень найден приближенно, например, с помощью калькулятора – 0 баллов.

5. В каждой клетке доски размером 6×6 сидит кузнечик. По свистку каждый из кузнечиков перепрыгивает через одну клетку по диагонали (не в соседнюю по диагонали клетку, а в следующую). При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного кузнечика, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 12.

Решение.



Покрасим клети доски в чёрный и белый цвета, как показано на рисунке. В результате в чёрный цвет будет покрашено 24 клетки, а в белый – 12 клеток. Заметим, что с чёрной клетки кузнечик может перепрыгнуть только на белую, а с белой – только на чёрную. Следовательно, после того, как кузнечики совер-

шили прыжок, на 24 чёрных клетках оказалось 12 кузнечиков. Значит, по крайней мере, 12 чёрных клеток окажутся незанятыми.
Указание. Рассмотрены только частные случаи – 0 баллов.