Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

Критерии оценивания
10 класс

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7**.**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

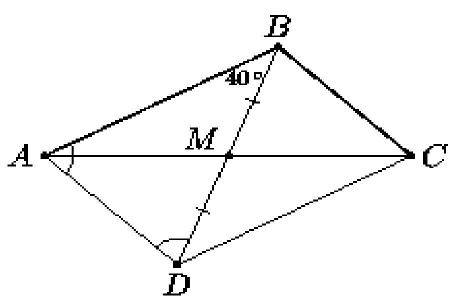
Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

1. Постройте график функции:
$y(x)=\sqrt{4\sin^4 x-2\cos 2x+3}+\sqrt{4\cos^4 x+2\cos 2x+3}$

ОТВЕТ: Графиком функции является прямая, заданная уравнением $y = 4$.

РЕШЕНИЕ. $y=\sqrt{4\sin^4 x-2+4\sin^2 x+3}+\sqrt{4\cos^4 x+4\cos^2 x-2+1} = |2sin^2x+1| + |2cos^2x+1| = 2sin^2x + 2cos^2x + 2 = 4$.

2. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 40^o. Найдите угол ABC.



Решение. Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D (см. рис.). Так как $AB = 2BM$, то $AB = BD$, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Следовательно, $\angle BAD = \angle BDA = (180^o - 40^o) : 2 = 70^o$.
Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\angle CBD = \angle ADB = 70^o$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 110^o$.
Ответ 110^o.

3. Антон и Борис играют в игру: Антон записывает на доске сумму, а Борис должен, поменяв некоторые знаки на «минус», получить в результате выполнения

арифметических операций число 2020. Антон записал: $2019^2+2018^2+2017^2+2016^2+\ldots+2^2+1^2$. Сможет ли Борис выиграть?

ОТВЕТ: да.

РЕШЕНИЕ. Нетрудно заметить, что $(n+3)^2+n^2-(n+2)^2-(n+1)^2=4$. Поэтому из чисел $2019^2-2018^2-2017^2-2016^2-\ldots-5^2-4^2$ можно выстроить 504 четверки, которые в сумме дадут $504\cdot 4=2016$. Остаётся дописать: $2016+9-4-1=2020$, ч.т.д.

4. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x многочлена

$$P(x) = (x^7 + x - 1)^{2020}.$$

ОТВЕТ: $\frac{1-3^{2020}}{2}$.

РЕШЕНИЕ.

Если мы раскроем скобки в выражении $(x^7 + x - 1)^{2020}$, то нечетные степени переменной x будут получаться только как результат произведения четной и нечетной степеней x^7 и x либо наоборот – нечетной и четной степеней x^7 и x. Следовательно, многочлены $P(x) = (x^7 + x - 1)^{2020}$ и $P(-x) = (-x^7 - x - 1)^{2020}$ будут отличаться только знаками коэффициентов при нечётных степенях x. Значит, многочлен $Q(x) = P(x) - P(-x)$ будет содержать только нечётные степени x, причем с удвоенными относительно $P(x)$ коэффициентами. Следовательно, искомая сумма коэффициентов равна половине значения $Q(1)$. Так как

$$Q(1) = P(1) - P(-1) = 1 - 3^{2020},$$

то сумма коэффициентов при нечетных степенях x многочлена $P(x)$ равна $\frac{1-3^{2020}}{2}$.

5. Назовем натуральное число *переставным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- Все его цифры ненулевые;
- Число делится на 11;
- Само число и любая перестановка цифр этого числа дает число, которое делится на 12.

Сколько существует переставных десятизначных чисел?

ОТВЕТ: 50 чисел.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что перестановка цифр сохраняет кратность 3. Из делимости на 4 следует, что все его цифры четные. Кроме того, оно не может содержать цифры 2 и 6, поскольку ни одно число из четных цифр, заканчивающееся на 2 или 6, не делится на 4. Таким образом, число состоит только из цифр 4 та 8. Пусть цифр 8 будет k, тогда цифр 4 буде $10-k$. Тогда сумма цифр: $8k+(10-k)4=40+4k$. Поскольку $0\le k\le 10$, то в силу кратности числа трем – возможны только значения $k=2,5,8$. Каждый из вариантов числа удовлетворяет условиям 1 и 3, а потому остается проверить выполнение условия 2.

Из свойства делимости на 11 сумма цифр на четных местах минус сумма на нечетных – должна делиться на 11. В силу её четности она может равняться 0, ± 22, ….

$k=2$. Наибольшая по модулю разность между суммами цифр на четных и нечетных местах может составлять $2\cdot 8+3\cdot 4-5\cdot 4=8$, что не удовлетворяет условию делимости на 11, наименьшая: $4\cdot 4+1\cdot 8-4\cdot 4-1\cdot 8=0$. То есть ровно одну четную и ровно одну нечетную (произвольные) позиции могут занимать 8. Таких вариантов $5\cdot 5=25$.

$k=5$. Наибольшая по модулю разность между суммами цифр на четных и нечетных местах может составлять $5\cdot 8-5\cdot 4=20<22$, поэтому делимость на 11 возможна только когда эта разность равна 0. Но это невозможно, так как количество цифр 4 та 8 – нечетно и поделить их на две равные по суммам группы невозможно.

$k=8$. Наибольшая по модулю разность между суммами цифр на четных и нечетных местах может составлять $5\cdot 8-3\cdot 8-2\cdot 4=8<22$, поэтому делимость на 11 возможна только когда эта разность равна 0. То есть ровно одну четную и ровно одну нечетную (произвольные) позиции могут занимать 4. Таких вариантов $5\cdot 5=25$.

Таким образом, всего получаем 50 чисел.