10 класс

1. Коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена ax^2+bx+c – натуральные числа, не большие 2019. Может ли такой трехчлен иметь два различных корня, которые отличаются меньше чем на $0,01$?

Решение. Ответ: Может, например $1001x^2 + 2001x + 1000$. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ отличаются на величину $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$. Сделаем, например, $\sqrt{b^2-4ac} = 1$. Для этого заметим, что $(2n+1)^2 = 4n(n+1)+1$. Тогда при $a = n+1$, $b = 2n+1$ и $c = n$ будет $\dfrac{b^2-4ac}{a} = \dfrac{1}{n+1}$ и подойдет, например, $n = 1000$ (или $n = 100$).

2. Решите в натуральных числах x, y, z числах уравнение ($x!$ – это икс факториал)

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x!+y!}{z!}$$

Решение. Ответ: (a, b, c), где каждое из a, b, c равно независимо от других 1 или 2; (a, a, a) при $a \geqslant 3$.

Перепишем уравнение в виде $(x+y)(z-1)! = x! + y!$.

1) Пусть $z > x$ и $z > y$. Тогда $(x+y)(z-1)! = x!+y! \leqslant 2(z-1)!$. Отсюда $x+y \leqslant 2$ и $x = y = 1$. В этом случае $(z-1)! = 1$ и $z = 1$ или $z = 2$. То есть, в рассмотренном случае получаем тройку $(1, 1, 2)$.

2) Пусть $z = y$. Тогда уравнение имеет вид $(x+z)(z-1)! = x! + z!$ или $(z-1)! = (x-1)!$. Тогда либо $x = y = z$, либо одно из двух: $x = 1, z = 2$; $x = 2, z = 1$. Получаем тройки (a, a, a), $a \in \mathbb{N}$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$. Аналогично в случае $z = x$ получаем дополнительно $(1, 2, 1)$ и $(2, 1, 2)$.

3) Пусть $x < z < y$. Тогда $(x+y)(z-1)! < \left(1+\dfrac{y}{z}\right)z! \leqslant \left(1+\dfrac{y}{z}\right)(y-1)! = \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)y! \leqslant y! < x!+y!$. Решений нет. Аналогично, нет решений и если $y < z < x$.

4) Пусть, наконец, $x > z$ и $y > z$. Тогда $x(z-1)! \leqslant x!$ и $y(z-1)! \leqslant y!$, причем равно только если $z = 1$. Тогда $x = y = 2$ и добавляется еще решение $(2, 2, 1)$.

3. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что $BA_1 = 0,75BC$, $CB_1 = 0,75CA$, $AC_1 = 0,75AB$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами $0,5P < P_1 < 0,75P$.

Решение. Возьмём на сторонах AB, BC, CA точки C_2, A_2, B_2 так, что $A_1B_2||AB$, $B_1C_2||BC$, $C_1A_2||CA$. Тогда $A_1B_1 < A_1B_2 + B_2B_1 = 0,25AB + 0,5CA$. Аналогично, $B_1C_1 < 0,25BC + 0,5AB$ и $C_1A_1 < 0,25CA + 0,5BC$. Складывая эти неравенства, получаем $P_1 < 0,75P$.

Ясно, что $A_1B_1 + A_1C > B_1C$, т.е. $A_1B_1 + 0,25BC > 0,75CA$. Аналогично $B_1C_1 + 0,25CA > 0,75AB$ и $C_1A_1 + 0,25AB > 0,75BC$. Складывая эти неравенства, получаем $P_1 > 0,5P$.

4. Назовем натуральное число *малочастным*, если его нельзя представить как произведение более чем четырех целых множителей, каждый из которых больше единицы. Семь подряд идущих трехзначных чисел записали подряд так, что получилась строчка из 21 цифр. Докажите, что некоторые шесть подряд цифр в этой строчке, взятые в том же порядке, образуют малочастное число.

Решение. Рассмотрим шесть цифр, относящихся к двум подряд идущим трехзначным числам. Число A, изображенное этими шестью цифрами, имеет вид $1001x+1$

(где x – меньшее из двух трехзначных чисел). Число A в трех из шести случаев (когда x – четное) не делится на 2, оно не делится также на 7, 11 и 13 (поскольку на эти числа делится число $1001x$). Среди трех нечетных чисел $1001 \cdot 2k + 1$, $1001(2k+2)+1$ и $1001(2k+4)+1$ ровно одно делится на 3 и не более одного делится на 5. Поэтому среди этих трех чисел есть такое, которое не делится ни на что из набора 2, 3, 5, 7, 11, 13. Если бы это число не было *малочастным*, оно должно было бы быть не меньше, чем 17^5 (у него не менее пяти простых множителей, каждый не меньше 17). Последнее число больше 1000000, и не является шестизначным. Поэтому малочастное число есть.

5. Фигура «лучник» на клетчатой доске бьет по лучу – по клеткам вверх, вниз вправо или влево (ровно одно направление из четырех; направления для разных лучников не зависят друг от друга). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга лучников можно выставить на шахматную доску 8×8?

Решение. Ответ: 28. Докажем, что больше 28 лучников поставить нельзя. Рассмотрим какую-нибудь расстановку с максимально возможным числом лучников. Проделаем последовательно две операции:

1) тех лучников, которые стоят на краю доски, развернем так, чтобы они били «наружу» (от этого ситуация «не ухудшится», то есть никакие лучники не станут бить друг друга, если они до этого друг друга не били);

2) сдвинем лучников, стоящих не на краю доски, в направлении их стрельбы до края доски. В результате, в каждой граничной клетке доски окажется не более одного лучника. Кроме того, никакие два лучника не будут бить друг друга (поскольку тех, кто стоял на краю, мы развернули «наружу»). Следовательно, всего лучников не больше, чем граничных клеток, то есть не больше, чем 28.

Пример из 28 лучников: на нижней горизонтали 8 лучников бьют вниз; на верхней горизонтали 8 лучников бьют вверх; в крайней левой колонке на 2–7 горизонталях 6 лучников бьют влево; в крайней правой колонке в 2–7 горизонталях 6 лучников бьют вправо.

Замечание: Решение, основанное на одном «сдвиге лучников в направлении их стрельбы до края стола» нельзя считать полностью правильным. Ведь при такой операции два лучника могут претендовать на одну и ту же клетку границы доски!