ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/2020 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

1. Приведите пример натурального числа, которое само делится на 2019, и сумма его цифр делится на 2019. Не забудьте показать, что Ваш пример удовлетворяет условию.

2. Дядя купил всем своим племянникам по новогоднему подарку, состоящему из конфеты, апельсина, пирожного, шоколадки и книги. Если бы он на те же деньги купил одних конфет, их оказалось бы 224. Апельсинов он на те же деньги мог бы купить 112, пирожных – 56, шоколадок – 32, книг – 16. Сколько племянников у дяди? Ответ обоснуйте.

3. В квадрате $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Точка K – середина стороны AB. На сторонах AD и BC выбрали точки M и N соответственно так, что лучи OK, OM и ON делят квадрат на три части одинаковой площади. В каком отношении точка M делит сторону AD?

4. На доске были написаны числа a, b и c. Их стёрли, а взамен записали числа a^4-2b^2, b^4-2c^2, c^4-2a^2. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Найдите числа a, b, c, если известно, что $a+b+c = -3$.

5. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) в точках C_0, A_0, B_0 соответственно. CH – высота треугольника ABC. Точка M – середина отрезка A_0B_0. Докажите, что $MC_0 = MH$.

6. Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было в стаде овец. Желая разделить выручку поровну, они стали по очереди, начиная со старшего брата, брать из общей суммы по 10 рублей. После того, как старший брат в очередной раз взял 10 рублей, младшему осталось меньше 10 рублей. Чтобы обеспечить равный делёж, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценён нож?

Время выполнения работы – 240 минут.

Решения и критерии проверки.

1. **Ответ.** Например, 20192019…2019 (2019 раз).

   Критерии проверки. Любой верный пример с проверкой – **7 баллов**. Просто пример без проверки – **2 балла**. Неверный пример – **0 баллов**.

2. **Ответ.** 8. **Решение.** Выразим цены всех товаров через цену конфеты. Апельсин стоит как две конфеты, пирожное – как 4 конфеты, шоколадка – как 224:32 = 7 конфет, книга – как 14 конфет. Общая цена подарка равна цене 1+2+4+7+14 = 28 конфет, а племянников у дяди 224:28 = 8.

   Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. **Ответ.** 5:1 **Решение.** Пусть площади AKO и BKO равны S (очевидно, что они одинаковы). Тогда из равенства площадей BLOK и AKOM следует равенство площадей треугольников BLO и AOM, обозначим их площади через S_1. Так как площадь BCO равна 2S, то площадь OLC равна $2S-S_1$ и равна площади OMD. Таким образом, площадь части OLCMD равна $2S-S_1 + 2S-S_1 + 2S = 6S-2S_1$. Из равенства площадей всех трех частей получаем уравнение: $6S- 2S_1 = S+S_1$, значит, $S=3/5\ S_1$.

   Рассмотрим треугольники AOM и MOD, их площади равны соответственно S_1 и $2S-S_1 = S_1/5$. Эти треугольники имеют общую высоту, следовательно, их основания AM и MD относятся как площади, т.е. 5:1.

   Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Правильно выражены площади AOM и OMD – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

4. **Ответ:** $a = b = c = –1$. **Решение.** Из условия следует, что $a^4–2b^2+b^4–2c^2+c^4–2a^2 = a+b+c = –3 \Leftrightarrow a^4–2b^2+b^4–2c^2+c^4–2a^2+3 = (a^2–1)^2+(b^2–1)^2+(c^2–1)^2 = 0$. Следовательно, $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, то есть каждое из чисел a, b, c равно либо 1, либо –1. Поскольку по условию $a+b+c = –3$, возможен единственный вариант $a = b = c = –1$.

   Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Доказано, что квадраты равны 1, но не отброшены случаи кроме всех -1 – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

5. **Решение.** Пусть точка O – центр вписанной окружности треугольника. Тогда её радиусы OA_0, OB_0, OC_0 перпендикулярны соответственным сторонам. Значит, четырехугольник OA_0CB_0 является квадратом и середина его диагонали A_0B_0 является одновременно серединой диагонали OC. Четырехугольник $OCHC_0$ является прямоугольной трапецией. Проведем её среднюю линию MN, она параллельна основаниям. Тогда медиана MN треугольника C_0MH является высотой, значит $MC_0 = MH$.

   Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов.** Установлено, что точка M является серединой отрезка CO, но дальнейших продвижений нет – **1 балл.** В остальных случаях – **0 баллов**.

6. **Ответ:** 2 рубля. **Решение.** Пусть в стаде было n овец. Тогда братья выручили n^2 рублей. Из условия следует, что количество десятков в числе n^2 нечетно. Представим число n в виде $10k+m$, где k – количество десятков, а m – количество единиц в нем. Тогда $n^2 = 100k^2+20km+m^2$. Таким образом, нечетность количества десятков в числе n^2 равносильна нечетности количества десятков в числе m^2. Перебирая квадраты однозначных чисел, убеждаемся, что количество десятков нечетно только у 4^2 и 6^2. Число n^2 в обоих этих случаях оканчивается на 6, то есть при дележе денег младший брат получил на 4 рубля меньше старшего. Чтобы в этой ситуации обеспечить равный делёж, старший брат должен передать младшему 2 рубля.

   Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Установлен факт про нечетность количества десятков m^2 – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.