10.1. Числа *a, b, c,* отличные от нуля, образуют геометрическую прогрессию (и именно в этом порядке: b – средний член прогрессии). Доказать, что уравнение $ax^2+2\sqrt{2}bx+c=0$ имеет два корня.

Решение. По условию $b=aq$, $c=aq^2$ ($a\neq 0$ и $q\neq 0$) и исходное уравнение примет вид

$$ax^2+2\sqrt{2}aqx+aq^2=0 \text{ или } x^2+2\sqrt{2}qx+q^2=0$$

– дискриминант последнего уравнения $D=8q^2-4q^2=4q^2>0$, поэтому уравнение имеет два различных корня.

10.2. В ряд последовательно выписаны 21 число: от 1999 до 2019 включительно. Увлеченные нумерологией Вова и Дима совершили следующий ритуал: сначала Вова стер несколько последовательных чисел, затем Дима стер несколько последовательных чисел, наконец, Вова стер несколько последовательных чисел (в каждом шаге они стирали *последовательные натуральные числа,* не перепрыгивая через образовавшиеся лакуны). В итоге сумма чисел, стертых Вовой, оказалось ровно в четыре раза больше суммы чисел, стертых Димой, и от ряда осталось одно число. Какое число осталось нестертым?

Решение. Пусть n – сумма чисел, стертых Димой, тогда $4n$ – сумма чисел, стертых Вовой, $5n$ – сумма чисел, стертых обоими, $42189-5n$ – число, оставшееся нестертым (42189 – сумма всех чисел от 1999 до 2019). По условию $1999\leq 42189-5n\leq 2019$, откуда $8034\leq n\leq 8038$ – ясно, что Дима стер 4 числа, по условию последовательных; при этом $8034=2007+2008+2009+2010$, $8038=2008+2009+2010+2011$, а промежуточные значения n не являются суммами последовательных четырех чисел. При $n=8034$ получим $5n=40170$, $42189-5n=2019$, а при $n=8038$ получим $5n=40190$, $42189-5n=1999$ – оба варианта непротиворечивы, и в любом случае нестертым оказывается одно из крайних чисел.

Ответ: 1999 или 2019.

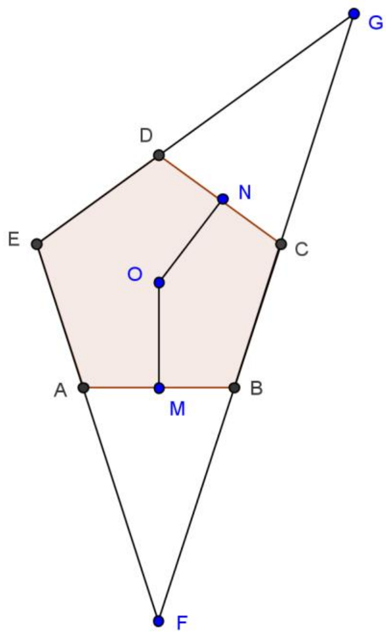
10.3. В таблице 3×3 написаны 9 чисел так, что суммы чисел в строках, в столбцах и на каждой из 2 диагоналей равны между собой. Сумма всех 9 чисел равна 2019. Какое число написано в центральной клетке таблицы?

Решение. Сумма чисел в каждой из восьми линий равна $\frac{2019}{3}=673$. Сложив суммы, полученные в 4 рядах, содержащих центральную клетку, и вычтя сумму всех чисел, получим что сумма чисел в ряду втрое больше числа в центральной клетке.

Ответ: $\frac{673}{3}$.

10.4. Все углы пятиугольника *ABCDE* равны. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам *AB* и *CD* пересекаются на биссектрисе угла *E*.

Решение. *ABCDE* – пятиугольник с равными углами, *OM, ON* – серединные перпендикуляры к *AB* и *CD* (*M,N* – их основания, *O* – точка их пересечения). Продолжим *EA* и *CB* до пересечения в точке *F*. Продолжим *ED* и *BC* до пересечения в точке *G*. Сумма углов *ABCDE* равна 540°, значит, каждый его угол равен 108°. $\angle FAB = \angle FBA$ = 180° – 108° = 72°: треугольник *AFB* равнобедренный, и *F* лежит на *OM*. Аналогично, в треугольнике *CGD* *G* лежит на *ON*. *FO* и *GO* – биссектрисы углов *BFA* и *CPD*, и поэтому *O* – точка пересечения биссектрис треугольника *EFG*.



10.5. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$. Доказать, что $\sqrt{1-ab}$ – рациональное число.

Решение. $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=(ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2$, откуда следует $\sqrt{1-ab}=\left|\frac{a+b+1}{a+b}\right|$: сумма, частное, модули рациональных – рациональны.