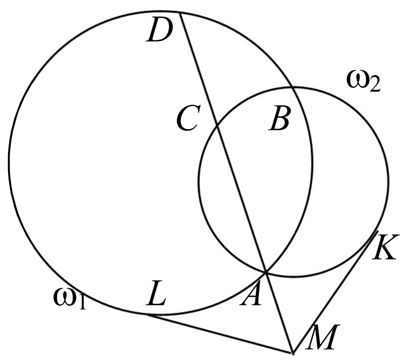
10 класс

10.1. Прямая, параллельная прямой $y = kx$, имеет уравнение $y = kx + b$. Абсциссами точек её пересечения с гиперболой являются оба корня уравнения $\frac{k}{x} = kx + b$, равносильное уравнению $kx^2 + bx - k = 0$. Произведение корней этого уравнения равно -1. Перемножив три таких произведений, получаем ответ: -1.

10.2. Обозначим точки касания через K и L, как на рисунке. По условию $MK = ML$. Предположим, что точка M не лежит на прямой AB. Проведем прямую AM. Пусть она второй раз пересекает окружность ω_1 в точке C, окружность ω_2 в точке D. По свойству касательной и секущей, применённому к окружности ω_1, получаем $MK^2 = MA \cdot MC$, по этому же свойству, применённому к окружности ω_2, получаем $ML^2 = MA \cdot MD$. Так как $MK = ML$, то $MC = MD$. Это значит, что точки C и D совпадают друг с другом, а значит, и с точкой B.

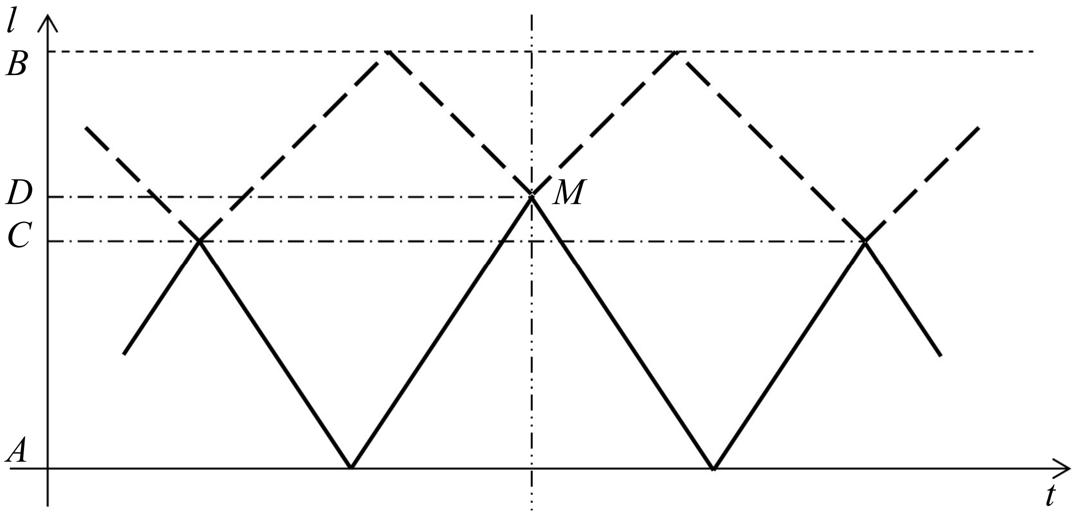


Возможно, что прямая AM касается одной из окружностей. Тогда одна из точек C или D совпадает с точкой A, и все рассуждения остаются в силе.

10.3. Рассмотрим пять точек на окружности, расположенных в вершинах вписанного правильного пятиугольника. Так как точки могут быть окрашены в два цвета, то три из них окрашены в один цвет. Но любые три вершины правильного пятиугольника являются вершинами равнобедренного треугольника. А так как правильных пятиугольников, вписанных в окружность, бесконечно много, то и искомых равнобедренных треугольников бесконечно много.

10.4. **Ответ:** В точке D.

Применим графическое представление. По оси абсцисс откладываем время, по оси ординат – расстояние. На оси ординат показываем края бассейна – точки A и B, и точки встреч – C и D. Движение одного пловца изображается сплошной линией, другого – штриховой. Движение с постоянной скоростью изображается на графике прямолинейным отрезком. При изменении направления движения после встречи с краем бассейна или другим пловцом отрезок меняет направление, при этом угол наклона к оси абсцисс меняет знак и не меняется по абсолютной величине.



Пусть точка M на графике соответствует моменту второй встречи (в точке D бассейна). Графики движения обоих спортсменов симметричны относительно вертикальной прямой, проходящей через точку M. Поэтому третья встреча произойдет в той же точке, что и первая, то есть в точке C. Такая же ситуация для любой другой точки встречи. Поэтому точки встречи чередуются: нечетные происходят в точке C, четные – в точке D.

10.5. Доказательство будем проводить индукцией по числу команд n. При $n = 2$ утверждение верно. Предположим, что оно верно при $n = k$ и докажем его для $n = k + 1$. n команд согласно индуктивному предположению по результатам игр между собой можно расположить в список, удовлетворяющий условию задачи: B_1, B_2, …,B_n. Если команда A выиграла у B_1, то поместим ее в начало списка, если проиграла B_n – то в конец. В противном случае найдем в списке первую команду, у которой выиграла A, и поставим A перед ней.