Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2019-2020 учебный год

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

10 класс

1. Ответ: 0, 4.
Решение. Пусть $x_1,\ x_2$ - корни уравнения $x^2+ax+a=0$, и один из них целый корень. По теореме Виета имеем $x_1+x_2=-a,\ \ x_1\cdot x_2=a$. Так как a и один из корней – целые числа, то и второй корень – целое число. Исключая из равенств a, получим $x_1\cdot x_2+x_1+\ x_2=0$, или, прибавляя к обеим частям по 1, и разлагая левую часть на множители, получим $(x_1+1)(x_2+1)=1$. Возможны два варианта: либо оба множителя левой части равны 1, либо -1. В первом случае получим $x_1=x_2=0$, во втором - $x_1=\ x_2=-2$. Для найденных корней из исходных равенств находим $a = 0$, либо $a = 4$.
Критерии. Обоснованно найдены все значения – 7 баллов; потеряно одно из значений – 4 балла; приведен ответ, но не доказано, что других решений нет – 1 балл; указан только ответ 0 – 0 баллов.

2. Ответ: 998412.
Решение. Наибольшее четырехзначное число, кратное 13, равно 9997. Среди чисел от 99970 до 99979 имеется число 99977, кратное 17, но среди чисел от 999770 до 999779 нет числа кратного 19. А вот для следующего числа 9984, кратного 13, число 99841 делится на 17, а число 998412 делится на 19.
Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ, но не доказано, что число наибольшее – 4 балла; неверный ответ – 0 баллов.

3. *Решение*. Если $x>0$ то $x^3>0$. Тогда $t>x^3>0,\ \ z>t^3>0$ и $y>z^3>0$, то есть все числа положительные. Если $x<0$, то $y^3<x<0$, откуда $y<0$. Аналогично, из условия $z^3<y<0$ получаем, что $z<0$, а из неравенства $t^3<z<0$, что $t<0$, то есть в этом случае все числа отрицательные, а их произведение положительно. Наконец, если $x=0$, то, как и в первом случае, получаем последовательно $t>0,\ \ z>0,\ y>0$ и $x>0$, либо, как во втором случае, $y<0$, $z<0$, $t<0$ и $x<0$. В обоих случаях получаем противоречие.
Критерии. Верное доказательство – 7 баллов; не рассмотрен случай $x=0$ – 5 баллов.

4. Ответ: $2^{12}-1$.
Решение. Всего различных наборов (включая пустой набор) из 13 чисел 2^{13}. Покажем, что ровно половина из них хорошие. Действительно, так как сумма всех чисел от 1 до 13, равная 91, число нечетное, то для каждого хорошего набора чисел оставшиеся числа образуют плохой набор, то есть набор, сумма чисел которого – нечетное число. Верно и обратное, для каждого плохого набора оставшиеся числа образуют хороший набор. Поскольку набор из всех чисел плохой, то соответствующий ему хороший набор – пустое множество, которое не удовлетворяет условию задачи.
Критерии. Обоснованный ответ – 7 баллов; учтен пустой набор – минус 1 балл; ответ без обоснования – 1 балл.

5. Решение. Имеем $\angle AFB = \angle FBC = \angle DBC = \angle DAC$. Первое равенство следует из параллельности прямых *AF и BC, второе равенство – из того, что точка D лежит на отрезке FB, наконец, третье равенство следует из равенства вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Так как* $\angle AFB = \angle AFD$, а последний опирается на дугу AD окружности, описанной вокруг треугольника *ADF*, то *угол между хордой* AD и секущей AC равен половине дуги, заключенной между ними, то есть AC является касательной к окружности, описанной вокруг треугольника *ADF*.
Критерии. Верное доказательство – 7 баллов; замечено первое равенство углов – 2 балла, замечено третье равенство углов – плюс еще два балла.