Решение 11 класс

1. Ответ. Не существует.

Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр – различные числа от 1 до 8, то цифры у восьмизначного числа различные.Далее, если число дает остаток 8 при делении на цифру, то эта цифра – 9. Значит, последняя цифра числа равна 9. Аналогично, если число дает остаток 7 при делении на цифру, эта цифра – 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте; поэтому предпоследняя цифра – 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число может быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на третью цифру (4) дает остаток 1, а не 3.**Замечание.** Также число 23456789 даёт остаток 5 (а не 7) при делении на 8.

2. Подставив данный корень$x = a + b$ в уравнение, получаем равенство

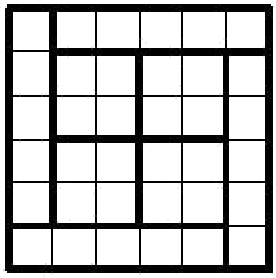
$(a + b + a)(a + b + b) = (2a + b)(2b + a) = 9$. Тогда $9 = 5ab + 2(a^2 + b^2) \geq 5ab + 2 \cdot 2ab = 9ab$,

откуда $ab \leq 1$. (Мы использовали неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, которое эквивалентно $(a - b)^2 \geq 0$.)

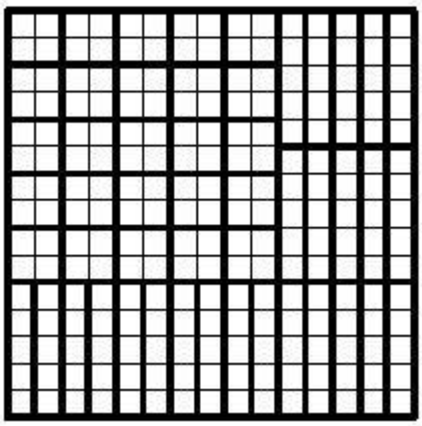
3. Ответ. 12, 15, 18.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 5x = 9x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 9, то есть n должно делиться на 3. Таким образом, могут подойти лишь значения $n = 12$, $n = 15$ и $n = 18$.

Покажем, как уложить требуемые квадраты. Квадрат 6×6 можно уложить, использовав поровну плиток обоих типов (см. рис.). Так как квадраты 12×12 и 18×18 разрезаются на 6×6 , то их также можно уложить требуемым образом.



На следующем рисунке показано, как уложить квадрат 15×15, используя по 25 плиток каждого типа.

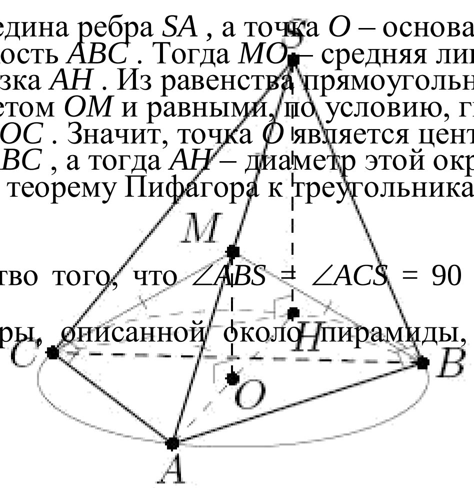


Замечание. Квадрат 18×18 можно разбить на прямоугольники 2×9, каждый из которых можно уложить, используя по 2 плитки каждого типа.

4. Первое решение. Пусть M – середина ребра SA. Так как $MA = MS = MC$, то в

треугольнике ASC медиана MC в два раза больше стороны AS, к которой она проведена. Значит, треугольник ASC – прямоугольный с гипотенузой AS (см. рис.). Аналогично, треугольник ASB – прямоугольный с гипотенузой AS. Поэтому $AS^2 = BA^2 + SB^2 = CA^2 + SC^2$. Но $SC^2 = CH^2 + SH^2$ и $SB^2 = BH^2 + SH^2$. Подставив в предыдущее равенство, получим $BA^2 + BH^2 + SH^2 = CA^2 + CH^2 + SH^2$. Вычтя из обеих частей равенства SH^2, получим требуемое.

Второе решение. Пусть M – середина ребра SA , а точка O – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC . Тогда MO – средняя линия треугольника SAH , поэтому точка O – середина отрезка AH . Из равенства прямоугольных треугольников AMO , BMO и CMO с общим катетом OM и равными, по условию, гипотенузами AM , BM и CM , получаем, что $OA = OB = OC$. Значит, точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC , а тогда AH – диаметр этой окружности. Значит, углы ABH и ACH – прямые. Применив теорему Пифагора к треугольникам ABH и ACH , получаем утверждение задачи.



Замечание. Другое доказательство того, что $\angle ABS = \angle ACS = 90$, основано на том, что точка M является центром сферы, описанной около пирамиды, а тогда отрезок SA – диаметр этой сферы.

5. Ответ. Существуют.

Пусть, например, $a = 10000^2 + 10000$, $b = 1001$. Предположим, что существует $c = d^2$

такое, что числа a , b и c являются длинами сторон некоторого треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$. Рассмотрим первые два

из них: $a + b > c$ и $c > a - b$. Заметим, что $a + b = 10000^2 + 10000 + 1001 < 10000^2 + 10000 + 10000 + 1 = 10001^2$, и $a - b = 10000^2 + 10000 - 1001 > 10000^2$. Но тогда $10001^2 > a + b > c > a - b > 10000^2$, то есть $10001^2 > d^2 > 10000^2$. Это невозможно.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Рекомендации по оцениванию

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.