Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

Критерии оценивания

11 класс

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7**.**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

1. Найдите наибольшую возможную площадь четырехугольника, у которого произведение любых двух соседних сторон равно 1.

ОТВЕТ: 1.

РЕШЕНИЕ**.**

Пусть четырехугольник имеет стороны a, b, c, d. Тогда $ab = bc = cd = da = 1$. Из равенства $ab = bc$ следует, что $a = c$, а из равенства $bc = cd$ получаем, что $b = d$. Следовательно, данный четырехугольник – параллелограмм. Пусть α – угол между сторонами a и b. Тогда $S = a \cdot b \sin\alpha$, а площадь максимальна, если $\sin\alpha = 1$. Тогда $S = a \cdot b = 1$.

2. Про положительные числа a, b, c, d известно, что $abcd = 1$. Докажите, что среди чисел $\frac{a^2+1}{b^2}, \frac{b^2+1}{c^2}, \frac{c^2+1}{d^2}, \frac{d^2+1}{a^2}$ есть число, не меньшее 2.

РЕШЕНИЕ.

Предположим обратное, тогда каждое число меньше 2. Перемножив все эти положительные числа, получим, что $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{b^2c^2d^2a^2} < 16$. Но каждая дробь вида $\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x+\frac{1}{x}}{x} \geq \frac{2}{x}$ при положительных x. Тогда получаем, что это произведение после перегруппировки $\frac{a^2+1}{a^2}\cdot\frac{b^2+1}{b^2}\cdot\frac{c^2+1}{c^2}\cdot\frac{d^2+1}{d^2}\geq\frac{16}{abcd}=16$ - противоречие, значит, наше предположение не верно и хотя бы одно из данных чисел будет не меньше 2.

3. Найдите все тройки попарно разных действительных чисел x, y, z, являющихся решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=-x+3y+z, \\ y^2+z^2=x+3y-z, \\ z^2+x^2=2x+2y-z. \end{cases}$$

ОТВЕТ***:*** $x=0$, $y=1$, $z=-2$ или $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$.

РЕШЕНИЕ**.** Разность первых двух уравнений даёт:

$$x^2-z^2=-2(x-z)\Rightarrow x+z=-2,$$

поскольку числа по условию попарно разные. Разность второго и третьего дает:

$$y^2-x^2=y-x\Rightarrow y+x=1.$$

Подставим полученные соотношения $y=1-x$ и $z=-x-2$ в первое уравнение:

$$x^2+(1-x)^2=-x+3(1-x)+(-x-2)\Rightarrow 2x^2+3x=0.$$

При $x=0$, $y=1$, $z=-2$. При $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$.

4. Найдите радиус сферы, касающейся всех рёбер правильного тетраэдра с ребром а.

ОТВЕТ. $r=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

РЕШЕНИЕ.

Пусть M – центр грани ABC правильного тетраэдра ABCD , а O – центр указанной сферы. Поскольку точка O равноудалена от сторон треугольника ABC , её проекция на плоскость грани ABC совпадает с точкой M , т.е. центр сферы лежит на высоте тетраэдра. Пусть r – искомый радиус, K – середина AB , N – середина AD . Тогда

KM = CK/3 = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, AM = 2KM = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, DM = $\sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}$ = a$\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Рассмотрим составные части отрезка DM:
OM = $\sqrt{OK^2 - KM^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{12}}$,

OD = $\sqrt{ON^2 + DN^2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Т.к. DM = OM + OD, то приходим к уравнению относительно r:

$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{12}} + \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$ = a$\sqrt{\frac{2}{3}}$ или $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{12}}$ = = a$\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

5. Тринадцать девочек и тринадцать мальчиков принимали участие в математическом конкурсе. Каждый участник решил не более четырех задач. Для любых девочки и мальчика найдётся хотя бы одна задача, решённая обоими. Докажите, что была задача, которую решили не менее трёх девочек и не менее трёх мальчиков.

РЕШЕНИЕ.

Методом от противного. Предположим, что все задачи решили не более двух девочек или не более двух мальчиков.

Представим таблицу с 13 строками, каждая из которых соответствует девочке, и 13 столбцами, каждый из которых соответствует мальчику. По условию каждому их «пересечению» соответствует хотя бы одна задача, решенная обоими – и девочкой-строкой, и мальчиком-столбцом. Зафиксируем для каждой клетки одну такую конкретную задачу.

Будем считать задачу «красной», если её решили не более двух девочек и «чёрной» в противоположном случае (тогда её решили не более двух мальчиков). Каждую клетку покрасим в соответствующий цвет.

Заметим, что по принципу Дирихле либо в каком-нибудь столбце найдётся 7 красных клеток, либо в какой-нибудь строке найдутся 7 чёрных клеток (иначе получится, что всего клеток не более чем 13 × 6 + 13 × 6 < 13^2).

Рассмотрим, например, девочку-строку (пусть девочку зовут Аня), содержащую хотя бы 7 чёрных клеток.

Каждой из этих клеток соответствует задача, решённая максимум двумя мальчиками, а тогда Аня должна была решить не менее 4 различных задач (3 решенные задачи дали бы нам максимум 6 черных клеток). То есть мы можем указать не менее 4 различных задач, решённых этой девочкой. В силу первого условия никаких других задач Аня не решила, но тогда максимум 8 мальчиков имеют с ней общие решённые задачи, что противоречит тому условию, что каждый из 13 мальчиков должен иметь общую решенную задачу с каждой девочкой, в том числе и с Аней.

Точно так же разбирается случай, если в каком-нибудь столбце найдутся 7 красных клеток.

Полученное противоречие доказывает неверность нашего предположения. Следовательно, найдётся **задача, которую решили не менее трёх девочек и не менее трёх мальчиков.**