ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019-2020 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.

11-Й КЛАСС

1. Решить в целых числах уравнение $3\cdot 2^x+1=y^2$.

Ответ: $(0;-2),(0;2),(3;-5),(3;5),(4;-7),(4;7)$.

Решение

Очевидно, $x\ge 0$, иначе левая часть является дробной. Также очевидно $y=0$ не является решением.

Так как y в четной степени, то решения будут идти парами, например при $x=0$, получаем два решения $y=\pm 2$.

Пусть теперь $x>0$, $y>0$, тогда приходим к соотношению $3\cdot 2^x=(y-1)(y+1)$. Здесь левая часть, а значит и правая делятся нацело на 3, отсюда возможны два случая:

1) $y=3z+1$. Тогда $2^x=z(3z+2)$. Правая часть может иметь в качестве делителей только степени двойки, отсюда $z=2^p$, где $x>p\ge 0$, тогда $2^{x-p}=2\cdot(3\cdot 2^{p-1}+1)$. Это равенство невозможно для $p>1$, а также для $p=0$, при этом для $p=1$ получаем $x=4$, $y=\pm 7$.

2) $y=3z-1$. Тогда $2^x=z(3z-2)$. Правая часть может иметь в качестве делителей только степени двойки, отсюда $z=2^p$, где $x\ge p\ge 0$, тогда $2^{x-p}=2\cdot(3\cdot 2^{p-1}-1)$. Это равенство невозможно для $p>1$. Для $p=0$ получаем $x=0$, $y=\pm 2$ (получено ранее), для $p=1$ получаем $x=3$, $y=\pm 5$.

Критерии:

7	Все корни найдены, решение полностью аргументировано.
6	Все корни найдены, решение недостаточно обосновано.
4-5	Потеря части корней при аргументированном решении для части возможных значений y (потеряно нулевое решение и (или) отрицательные y).
3	Получены все корни при неверном или отсутствующем обосновании.
1-2	Получено несколько корней методом перебора.

2. Решить неравенство $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\le\frac{\sin x-3}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $x=-\frac{3\pi}{2}+4\pi k, k\in Z$.

Решение

Имеем $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\le\frac{\sin x-3}{2}$. Отсюда $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sin x}{2}\le-\frac{3}{2}$. Данное неравенство возможно лишь при одновременном выполнении равенств $\sin x=1$, $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=-1$, отсюда получаем ответ $x=-\frac{3\pi}{2}+4\pi k, k\in Z$.

Критерии:

7	Верный ответ, решение полностью аргументировано.
6 5-	Верный ответ, не полная аргументация или ответ неверный из-за арифметической ошибки или ошибка только в периоде $4\pi k$.
4 3-	Имеется 1-2 ошибки в применении тригонометрической формулы и(или) решении простейших тригонометрических уравнений, при решении системы уравнений либо уравнение верно сведено к системе.
2 1-	Имеются начальные продвижения в решении или имеется ряд ошибок в решении при верной идее.

3. Найти все пары действительных чисел a и b, для которых существует многочлен $f(x)$, такой что $f(f(x))=(x^2+ax+b)^2$.

Ответ: a **- произвольное,** $b=\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}$**.**

Решение (схема)

Многочлен имеет вид (это нужно пояснить) $f(x)=x^2+px+q$, раскрывая правую и левую часть соотношения, приходим к четырем уравнениям относительно p и q с параметрами a и b. Данная система должна быть разрешима, отсюда получаем условия: a - произвольное, $b=\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}$.

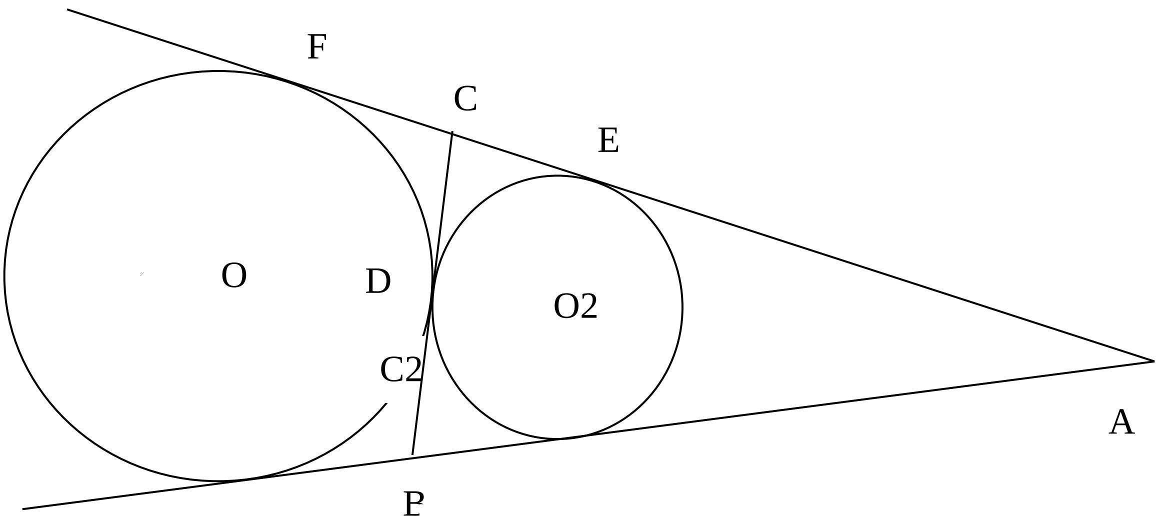
Критерии:

7	Ответ верный, решение полностью аргументировано.
6	Ответ верный, решение не до конца обосновано.
5-4	Ответ неверный, имеется одна или две арифметических ошибки.
3	Ответ неверный, имеется ошибка в применении формул сокращенного умножения или есть идея решения без ответа.
2-1	Имеются несущественные продвижения в решении. Верно рассмотрены частные случаи.

4. Окружности радиусов a>b>0 касаются друг друга внешним образом. К ним проведены три общие касательные. Найти периметр образованного ими треугольника.

Ответ: $P = \dfrac{4a\sqrt{ab}}{a-b}$ **.**

Решение



По теореме об отрезках касательных данный треугольник ABC является равнобедренным, причем все общие отрезки касательных равны, т.е. CE=CF=CD=DB=…=h/2, где h=FE – высота прямоугольной трапеции O1FEO2. Так как основания трапеции равны a и b, а боковая сторона O1O2=a+b, то по теореме Пифагора $h = 2\sqrt{ab}$.

Проведя высоту в трапеции O1FEO2 из вершины O2, получим $\cos\angle O2O1F = \dfrac{a-b}{a+b} = \sin\angle EAO2$. Отсюда из прямоугольного треугольника ADC заключаем, что $AC = \dfrac{CD}{\sin\angle EAO2} = \dfrac{\sqrt{ab}(a+b)}{a-b}$.

Следовательно $P = 2AC + 2CD = \dfrac{2\sqrt{ab}(a+b)}{a-b} + 2\sqrt{ab} = \dfrac{4a\sqrt{ab}}{a-b}$.

P.S. Имеются различные методы решения данной задачи, однако в любом случае все формулы для длин отрезков надо выводить!

Критерии:

7	Ответ верный, решение полностью аргументировано.
6-5	Ответ верный, решение не до конца обосновано либо ответ неверный из-за одной арифметической ошибки.
5	Ответ неверный, имеется несколько ошибок в формулах или преобразованиях при верной общей идее решения.

4-3	
3	Ответ неверный или отсутствует, имеются первые шаги в решении.
2-1	Имеются несущественные продвижения в решении. Рассмотрены частные случаи.

5. Дано произвольное натуральное 2019-значное число, в десятичной записи которого отсутствуют цифры 0,1,2,3. Если в числе имеются две подряд идущие цифры или два одинаковых подряд идущих двузначных числа, то их разрешается удалить. Также разрешается в любом месте вставить две одинаковые цифры или два подряд идущих одинаковых двузначных числа. Доказать, что с помощью перечисленных выше операций можно получить число меньшее, чем 10^5.

Решение

В записи числа используются 6 цифр: 4,5,6,7,8,9. Рассмотрим пару рядом стоящих цифр ab. Добавим слева две цифры bb, а справа две цифры aa, получим блок $bbabaa$, внутри него имеется два одинаковых двузначных числа $baba$, которые можно удалить, т.е. приходим к комбинации ba. Таким образом, любую пару рядом стоящих цифр можно поменять местами.

Используя последовательно попарную перестановку цифр можно в числе удалить любые две одинаковые цифры (где бы они не находились), поставив их рядом друг с другом.

Заметим, что любое удаление или добавление цифр не меняет четности количества цифр, поэтому в результате любых преобразований в числе будет нечетное число цифр. Так как всего используется 6 разных цифр, то после сокращений одинаковых цифр можно прийти к 7-значному числу. Однако согласно принципу Дирихле, в нем останется еще хоть одна пара одинаковых цифр, которую можно удалить. Таким образом, можно прийти к 5-значному числу, которое не превосходит числа 98765, что меньше, чем 10^5.

Критерии:

7	Ответ верный, решение полностью аргументировано.
6	Верная идея, имеется несущественный пробел в решении.
5-4	Имеется большая часть решения, возможно, доказана худшая оценка, например 10^7.
3-2	При верном начале решения утверждается, что задача некорректная (например, не учитывается нечетность числа 2019), либо имеется общая идея решения, например, доказано, что можно переставлять любые две цифры числа.
1	Рассмотрен конкретный пример преобразований числа (меньшего) с описанием идеи как можно удалять цифры.