11-й класс

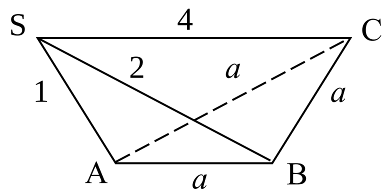
11.1 Докажите, что если $\sin x > 0{,}9$, то $|\sin 2x| < 0{,}9$.

Решение.

$$|\sin 2x| = |2\sin x\cos x| = 2\sin x\,|\cos x| \le 2|\cos x| =$$
$$= 2\sqrt{1-\sin^2 x} < 2\sqrt{1-0{,}9^2} = 2\sqrt{0{,}19} < 0{,}9.$$

11.2 Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны 1,2 и 4. Докажите, что треугольник, лежащий в основании пирамиды, не является равносторонним.

Решение. Докажем, что если основанием пирамиды служит равносторонний треугольник, то длины боковых ребер не могут составлять тройку 1,2,4. Допустим противное. См. рис.



Используем неравенство треугольника.

В треугольнике ASB: $SA + SB > AB$, т.е. $3 > a$.

В треугольнике ASC: $SA + AC > SC$, т.е. $a > 3a$.

Получено противоречие.

11.3 В круг радиуса 3 произвольным образом помещены несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Докажите, что найдется прямая, которая пересекает не менее девяти из этих кругов.

Решение. Спроектируем все круги на произвольный диаметр большого круга. Сумма длин проекций равна сумме диаметров кругов, т.е. 50. Если каждая точка большого диаметра покрывается проекциями не более восьми раз, сумма их длин не превосходит $6 \cdot 8 = 48 < 50$. Поэтому найдется точка, покрытая по меньшей мере девятью проекциями. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно большому диаметру, − искомая.

11.4 Последовательность натуральных чисел $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ такова, что $q_n < 2n$ для любого номера n. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел из этой последовательности или как число из самой последовательности.

Решение. Пусть m− произвольное натуральное число. Рассмотрим m первых членов последовательности: $q_1 < q_2 < \ldots < q_m < 2m$. Тогда, если q_k делится на m, в силу неравенства $q_k < 2m$ имеем просто $q_k = m$. Если же ни одно из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$ на m не делится, то среди них найдутся два числа $q_k < q_\ell$, дающие одинаковые ненулевые остатки при делении на m. При этом разность $q_\ell - q_k$ делится на m и, значит, будучи меньше 2m, просто равна m.

11.5 Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ задана формулами: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}\,a_n}$ при $n = 1,2,3,\ldots$ Докажите, что эта последовательность не ограничена (например, все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, больше миллиона).

Решение. Имеем $a_{k+1}^2 = \left(a_k + \frac{1}{\sqrt{k} a_k} \right)^2 = a_k^2 + \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k a_k^2} > a_k^2 + \frac{2}{\sqrt{k}}$. Просуммируем эти неравенства при $k = 1, 2, \ldots, n$: $a_{n+1}^2 > a_1^2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Достаточно доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ является неограниченной. Это просто. Каждое слагаемое $\frac{1}{\sqrt{k}}$ не меньше $\frac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому $x_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\,+}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{n слагаемых}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, а $\sqrt{n}$ неограниченно возрастает вместе с номером n.