11 класс

1. Число N имеет наименьший положительный делитель 1, второй по величине положительный делитель k и третий по величине положительный делитель m. При этом $k^k + m^m = N$. Чему равно N?

Решение. Ответ: $N = 260$. Если бы N было нечетным, то и k и m были бы нечетными, а значит $k^k + m^m$ – четное число. Значит, равенство $N = k^k + m^m$ в этом случае невозможно.

Пусть теперь N – четно. Тогда $k = 2$ и m тоже четно. Поскольку $4 = N - m^m$ делится на m, то $m = 4$ (так как $m > k$). Значит, $N = 2^2 + 4^4 = 260$.

2. Докажите, что для любых действительных положительных чисел x, y, z, t выполняется неравенство

$$\frac{x+y+z+t}{2} + \frac{4}{xy+yz+zt+tx} \geqslant 3.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{(x+z)+(y+t)}{2} + \frac{4}{(x+z)(y+t)} \geqslant 3$$

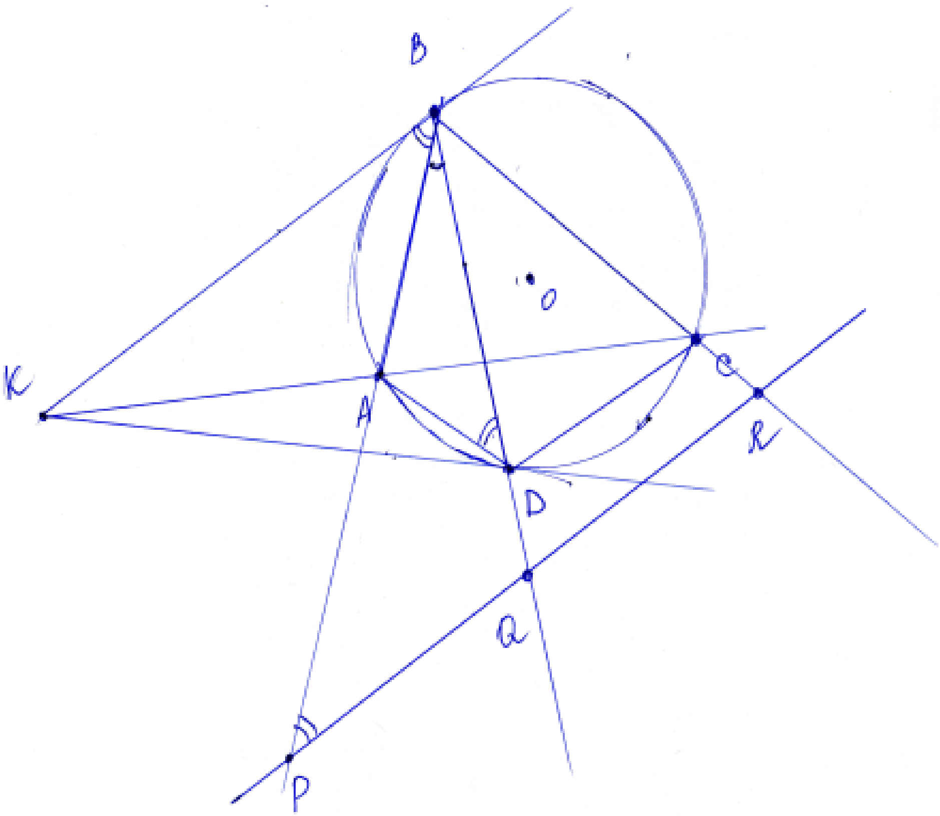
и обозначим $x+z=a$, $y+t=b$. Нужно доказать, что $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{4}{ab} \geqslant 3$. По неравенству о средних, $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{4}{ab} \geqslant \sqrt{ab} + \dfrac{4}{ab}$, поэтому достаточно доказать, что $\sqrt{ab} + \dfrac{4}{ab} \geqslant 3$. Пусть $\sqrt{ab} = c$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде $c^3 - 3c^2 + 4 \geqslant 0$. Но это верно для всех положительных c: $c^3 - 3c^2 + 4 = (c-2)(c^2-c-2) = (c-2)^2(c+1) \geqslant 0$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём касательные в точках B и D пересекаются в точке K, лежащей на прямой AC. Прямая, параллельная KB, пересекает прямые BA, BD и BC в точках P, Q и R соответственно. Докажите, что $PQ = QR$.

Решение. Так как $\triangle KAB$ подобен $\triangle KBC$, то $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{KB}{KC}$. Аналогично, $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{KD}{KC}$. Учитывая, что $KB = KD$, получаем $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$ или $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{BC}$. Далее,

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{\sin PBQ}{\sin BPQ} = \frac{\sin ABD}{\sin ADB} = \frac{AD}{AB}.$$

Аналогично, $\dfrac{QR}{BQ} = \dfrac{DC}{BC}$. Тогда $PQ = QR$.



4. В наборе натуральных чисел, не превосходящих 30, отметили 22 числа. Докажите, что есть такое отмеченное число, которое равно сумме каких-то трех других отмеченных чисел.

Решение. Пусть a – наименьшее отмеченное число, b – второе по величине отмеченное, а $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ – остальные отмеченные. Пусть для определенности $a < b < x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$. Не бывает отмеченных чисел меньше a. Рассмотрим суммы вида $a + b + x_i$ (20 сумм). Поскольку $b \leqslant 10$, а $x_i \leqslant 30$, то сумма трех отмеченных чисел наверняка не больше, чем $a + 10 + 30 = a + 40$. Таким образом, для 42 чисел $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_{20}, a + b + x_1, a + b + x_2, \ldots, a + b + x_{20}$ мы имеем не более чем $(a+40) - a + 1 = 41$ возможных значений. По принципу Дирихле, какие-то два числа из этих 42 чисел совпадают. Это и требовалось доказать.

5. На турнир по настольному боксу в Йошкар-Олу собрались 52 бойца. Известно, что силы у всех различны и в игре более сильный всегда побеждает более слабого, за одним исключением: самый слабый является неудобным соперником для самого сильного и всегда его побеждает. Реальные силы бойцов организаторам неизвестны. Могут ли организаторы выявить самого сильного бойца не более чем за 64 поединка?

Решение. Ответ: могут.

Обозначим сильнейшего бойца S, слабейшего W. Разобьем бойцов а 13 четверок. В каждой четверке проведем такие поединки: разбив четверку на пары, узнаем победителей в парах (пусть $a > b$ и $c > d$), затем узнаем победителя в паре победителей (пусть $a > c$). Боец a победил двоих, значит $a \neq W$. Поэтому $b \neq S$ и $c \neq S$. Сравним a и d. Если $a > d$, то $d \neq S$, поэтому a – сильнейший в четверке. Тогда переходим к следующей четверке. Если такая ситуация повторится во всех четверках, то мы за $13 \cdot 4 = 52$ поединка отсеем 39 бойцов, причем среди 13 оставшихся не будет W. Разбивая оставшихся как угодно на пары и отсеивая проигравшего, мы еще за 12 поединков найдем среди них S.

Допустим, однако, что в какой-то четверке при четвертом поединке оказалось, что $a < d$. Тогда возник цикл из трех бойцов: $a > c > d > a$. Ясно, что такое возможно только если в цикле есть S и W: а именно, $c = W, d = S$ либо $d = W, a = S$. Сравним b и d ($b \neq S$). Если $b > d$, то $a = S$, а если $b < d$, то $d = S$. Значит, мы нашли S не более чем за 53 поединка.