11.1. Числа a, b, c, отличные от нуля, образуют арифметическую прогрессию (и именно в этом порядке: b – средний член прогрессии). Доказать, что уравнение $ax^2+2\sqrt{2}bx+c=0$ имеет два корня.

Решение. По условию $a=b-d$, $c=b+d$, d – разность прогрессии, и уравнение примет вид

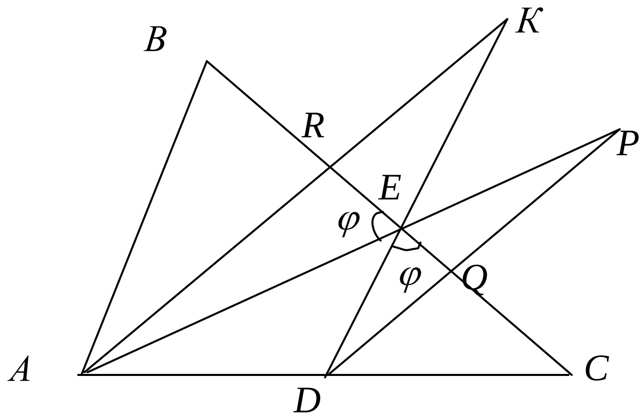
$$(b-d)x^2+2\sqrt{2}bx+(b+d)=0$$

– дискриминант этого уравнения $D=8b^2-4(b^2-d^2)=4b^2+4d^2>0$, т.к. $b\neq 0$, поэтому уравнение имеет два различных корня.

11.2. В ряд последовательно выписаны 21 число: от 2000 до 2020 включительно. Увлеченные нумерологией Вова и Дима совершили следующий ритуал: сначала Вова стер несколько последовательных чисел, затем Дима стер несколько последовательных чисел, наконец, Вова стер несколько последовательных чисел (в каждом шаге они стирали *последовательные натуральные числа*, не перепрыгивая через образовавшиеся лакуны). В итоге сумма чисел, стертых Вовой, оказалось ровно в четыре раза больше суммы чисел, стертых Димой, и от ряда осталось одно число. О каких числах можно точно сказать, что они были стерты Димой?

Решение. Пусть n – сумма чисел, стертых Димой, тогда $4n$ – сумма чисел, стертых Вовой, $5n$ – сумма чисел, стертых обоими, $42210-5n$ – число, оставшееся нестертым (42210 – сумма всех чисел от 2000 до 2020). По условию $2000\le 42210-5n\le 2020$, откуда $8038\le n\le 8042$ – ясно, что Дима стер 4 числа, по условию последовательных; при этом $8038=2008+2009+2010+2011$, $8042=2009+2010+2011+2012$ а промежуточные значения n не являются суммами последовательных четырех чисел. При $n=8038$ получим $5n=40190$, $42210-5n=2020$, а при $n=8042$ получим $5n=40210$, $42210-5n=2000$ – оба варианта непротиворечивы, но в любом случае числа 2009, 2010, 2011 были стерты Димой.

Ответ: 2009, 2010, 2011.



11.3. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка E, что угол BEA равен углу CED. Найдите отношение длин отрезков AE и DE.

Решение. Пусть $\angle BEA = \angle DEC = \varphi$. На продолжении AE за точку E выберем точку P такую, что $ED= EP$, на продолжении DE за точку E выберем точку K такую, что $AE= EK$. $\angle REK= \angle PEQ = \varphi$ следовательно, RE и EQ – серединные перпендикуляры к AK и DP (R, Q – их основания). Треугольники RKE и EPQ прямоугольны и подобны, значит, $KE:EP = RK:QP$ или $AE:ED = AR:DQ$. DQ – средняя линия в треугольнике ARC, поэтому, $AE:ED = 2:1$.

Ответ: $AE:ED = 2:1$.

11.4. Назовем натуральное число *интересным*, если оно является произведением ровно двух (различных или равных) простых чисел. Каково наибольшее количество последовательных чисел, все из которых – интересные?

Решение. Одно из четырех последовательных чисел делится на 4. Но из чисел, кратных 4, интересным является только само число 4. Но числа 3 и 5 не являются интересными, поэтому четырех последовательных интересных чисел не существует. Пример с тремя последовательными интересными числами: 33, 34, 35. **Ответ**: три.

11.5. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех x из промежутка (2,4) и удовлетворяют условиям: $2 < f(x) < 4$, $2 < g(x) < 4$, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, $f(x)g(x) = x^2$ для всех $x \in (2, 4)$. Доказать, что $f(3) = g(3)$.

Решение. Пусть $a \in (2,4)$. Положим $x_1 = a$ и построим последовательность $\{x_n\}$ по правилу $x_{n+1} = f(x_n)$. Тогда $g(x_{n+1}) = g(f(x_n)) = x_n$, и поэтому $x_{n+2}x_n = f(x_{n+1})g(x_{n+1}) = x_{n+1}^2$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ – геометрическая прогрессия. Если ее знаменатель q отличен от 1, то найдется номер n, при котором $x_n \in (2,4)$, а $x_{n+1} = f(x_n) \notin (2,4)$. Это противоречит условиям задачи, поэтому $q = 1$, в частности, $x_2 = x_1$, т.е. $f(a) = a$ при всех $a \in (2,4)$; то же самое для $g(x)$.