Ответы и решения. 11 класс.

1. Ответ: 891880; 891891.

Решение.

Пусть $\overline{\mathrm{ABC}DEF}$ данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число ABCDE через x. Тогда $\overline{\mathrm{ABC}DEF}$ + $\overline{F\mathrm{ABC}DE}$ = (10x + F) + (100 000 F + x) = 11x + 100 001 F = 11 (x + 9091 F). Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[891870;\ 891899]$ на 11 делятся числа 891880; 891891.

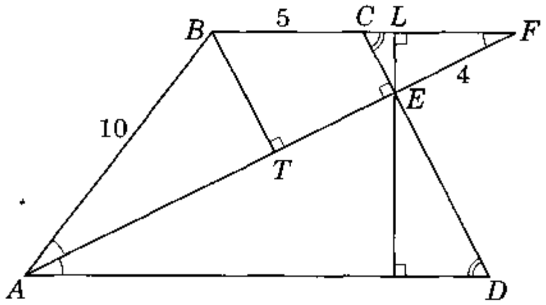
Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

11(x + 9091F) = 891880,

11 (x + 9091F) = 891891 имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – цифра, отличная от нуля. Для этого достаточно в каждое из уравнений подставить F = 1 и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара x = 71989, F = 1; второму – пара x = 71990, F = 1. Значит, если в качестве исходных чисел взять 719891; 719901, то в результате перестановки и сложения получим числа 891880; 891891 соответственно.

2. Ответ: DE = 9, AD = 15, S = 96.

Решение. Так как ∟BFA = ∟FAD = ∟FAB, то Δ ABF – равнобедренный.



BF = AB = 10, CF = AB – BC = 5, CE = $\sqrt{CF^2 - EF^2}$ = 3.

Пусть BT – высота ABF. Тогда из подобия прямоугольных треугольников BTF и CEF следует, что FT = 2 · EF = 8. Далее находим: AT = TF = 8, TE = EF = 4, AE = 12.

Из подобия треугольников AED и FEC (k = AE : EF = 3) следует, что AD = 15, DE = 9. Высота трапеции равна сумме высот треугольников CEF и AED, проведённых из вершины E .

Высота EL = $\frac{\mathrm{CE}\cdot\mathrm{E}F}{CF}$ = $\frac{3\cdot 4}{5}$ = $\frac{12}{5}$.

Высота трапеции h = 4 ·EL = $\frac{48}{5}$.

Площадь трапеции S = $\frac{1}{2}$ (5 + 15) · $\frac{48}{5}$ = 96.

3. Ответ: 2,1 млн. рублей.

Решение. Доля второго уменьшилась в 3 раза при неизменной его сумме денег, поэтому общая сумма увеличилась в 3 раза, а значит, первый внёс ещё 2 млн. рублей. Обозначив его общую сумму денег через x (млн. руб.), получаем $\frac{x}{3}$ = 7· $\frac{x-2}{1}$ → x =2,1.

4. Ответ: не может.

<u>Первое решение.</u> Пусть x и y – целые числа. Рассмотрим числа x^3 – 2010y и x. Заметим, что x^3 – 2010y – x = x(x – 1) (x +1) – 2010y. Так как произведение трёх последовательных чисел делится на 3, и 2010 делится на 3, то и разность x^3 – 2010y – x делится на 3. Это означает, что

числа $x^3 - 2010y$ и x имеют одинаковые остатки при делении на 3. Так как остатков при делении на 3 может быть три, а чисел на доске изначально два, то по крайней мере одного остатка от деления на 3 у чисел, записанных на доске, нет. Каждое дописывание числа вида $x^3 - 2010y$ добавляет на доску число с таким же остатком при делении на 3, как и у числа x. Поэтому на доске не могут появиться числа с отсутствующим остатком. Итак, на доске не могут появиться одновременно даже числа 2010, 2011, 2012, поскольку при делении на 3 они имеют остатки 0 ; 1 ;2.

Второе решение. Рассмотрим последние цифры чисел, которые дописывают на доску. Вычитание из числа 2010y не изменяет последнюю цифру числа, а при возведении в куб последние цифры чисел либо повторяются (для цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9), либо разбиваются на пары (2-8 и 3-7).

Таким образом, два исходных числа могут образовывать не более четырёх различных последних цифр у чисел, записанных на доске.

5. Решение. Пусть для определенности $S_{SA1B1} = S_{SB1C1}$

Из равенства площадей боковых граней пирамиды SABCD имеем

$S_{SAB} \cdot S_{SCD} = S_{SBC} \cdot S_{SAD}$,

$SA \cdot SB \cdot \sin\angle ASB \cdot SC \cdot SD \cdot \sin\angle CSD = SB \cdot SC \cdot \sin\angle BSC \cdot SA \cdot SD \cdot \sin\angle ASD$.

Разделив обе части последнего неравенства на $SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD$, получим

$\sin\angle ASB \cdot \sin\angle CSD = \sin\angle BSC \cdot \sin\angle ASD$.

Умножив обе части этого равенства на $SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1$, получим

$S_{SA1B1} \cdot S_{SC1D1} = S_{SB1C1} \cdot S_{SA1D1}$,

так как в обеих частях равенства первые множители равны, то и вторые также равны.