11 класс

1. Найдите сумму коэффициентов многочлена, полученного после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении
$(2x^{2021} - x^{2020} + x^{2019})^{11} - 29$.

   Решение. Во-первых, заметим, что сумма коэффициентов любого многочлена канонического вида $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ равна $P(1)$. Далее отметим, что после возведения скобки в 11 степень многочлен $Q(x) = (2x^{2021} - x^{2020} + x^{2019})^{11} - 29$ примет канонический вид (какие-то из коэффициентов при этом могут оказаться равными нулю). Итак, сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна $Q(1) = 2^{11} - 29 = 2019$. **Ответ: 2019.**

   Комментарий. Решения, в которых в том или ином виде фигурирует значение многочлена в точке 1, оцениваются в полный балл. Например, «Очевидно, что сумма коэффициентов многочлена равна его значению в точке 1. Ответ: 2019.» или «$Q(1) = 2019$». Дан **только** верный ответ – 3 балла.

2. Можно ли число 2019 представить в виде суммы 90 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

   Решение. У каждого слагаемого одна и та же сумма цифр, поэтому их остатки от деления на 9 одинаковы (сумма цифр числа дает тот же остаток от деления на 9, что и само число). Сумма 90 одинаковых остатков делится на 9, значит, и сумма любых 90 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр делится на 9. Но число 2019 на 9 не делится. **Ответ: нет.**

   Комментарий. Аналогичные рассуждения об остатках от деления на 3 (см. задачу №2 за 10 класс) к верному решению не приводят, поскольку 2019 делится на 3, но не делится на 9.

3. Известно, что $ab < 0$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 > 2ab + 2bc + 2ca$.

   Решение 1. Из условия задачи следует, что числа a и b имеют разные знаки. В силу симметрии можно считать, что $a > 0$, $b < 0$. Заметим, что при $c = 0$ неравенство, очевидно, выполняется ($a \neq b$). Пусть $c > 0$, тогда $bc < 0$ и доказываемое неравенство равносильно верному неравенству $(a - c)^2 + b^2 > 0 > 2ab + 2bc$. Аналогично, если $c < 0$, тогда $ac < 0$ и доказываемое неравенство равносильно верному неравенству $(b - c)^2 + a^2 > 0 > 2ab + 2ac$.

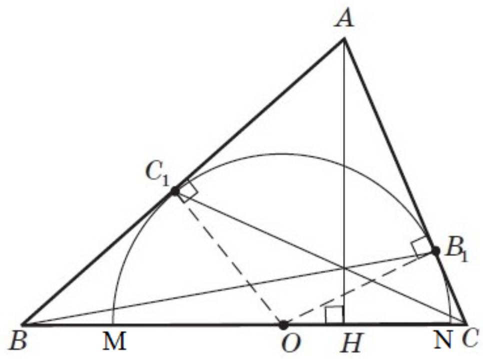
   Решение 2. Рассмотрим и преобразуем разность: $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = c^2 - 2c(a + b) + (a + b)^2 - 4ab = (c - (a + b))^2 - 4ab > 0$, так как $ab < 0$. Следовательно, $a^2 + b^2 + c^2 > 2ab + 2bc + 2ac$.

   Решение 3. Доказываемое неравенство равносильно неравенству $c^2 - 2(a + b)c + a^2 + b^2 - 2ab > 0$. Левая часть этого неравенства – квадратный трёхчлен относительно переменной c: его старший коэффициент равен 1, «ветви» соответствующей параболы направлены вверх. Дискриминант $\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab < 0$. Следовательно, этот квадратный трёхчлен принимает только положительные значения, что и требовалось доказать.

4. В треугольник ABC вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на стороне BC, а дуга касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$
где H – основание высоты, опущенной из точки A на сторону BC.

Комментарий. По теореме Чевы равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ равносильно утверждению: отрезки BB_1, CC_1 и AH пересекаются в одной точке.

Решение.



Пусть MN – диаметр данной полуокружности. Во-первых, отметим, что четырехугольник C_1AB_1O вписанный, поскольку сумма его противоположных углов равна $180°$. Пусть Ω – окружность, описанная около четырехугольника C_1AB_1O, очевидно, что AO ее диаметр. Поскольку отрезок AO виден под прямым углом из точек B_1 и H, то точки A, B_1, H и O лежат на одной окружности, а именно на той же окружности Ω. Введем следующие обозначения: $AC_1=AB_1=t$, $BC_1=x$, $BM=b$, $OH=h$, $NC=c$, $CB_1=y$, а R – радиус полуокружности с диаметром MN. Так как полуокружность с диаметром MN вписана в угол BAC, то AO – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы треугольника, получаем:

$$\frac{x+t}{y+t}=\frac{b+R}{c+R}. \tag{1}$$

Далее рассмотрим окружность Ω и пары секущих CA, CO и BA, BH, проведенных из точек C и B соответственно. По свойству секущих, проведенных из одной точки, имеем: $y(y+t)=(c+R-h)(c+R)$ и $x(x+t)=(b+R)(b+R+h)$, откуда $c+R-h=\frac{y(y+t)}{c+R}$ и $b+R+h=\frac{x(x+t)}{b+R}$.

Итак,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{t}{x}\cdot\frac{b+R+h}{c+R-h}\cdot\frac{y}{t}=\frac{y}{x}\cdot\frac{b+R+h}{c+R-h}=\frac{y}{x}\cdot\frac{x(x+t)}{b+R}\cdot\frac{c+R}{y(y+t)}=$$

$$=\frac{x+t}{y+t}\cdot\frac{c+R}{b+R}=|\text{ в силу равенства (1)}|=\frac{x+t}{y+t}\cdot\frac{y+t}{x+t}=1.$$

Комментарий. Доказано, что точки H, O, C_1, A и B_1 лежат на одной окружности – 3 балла.

5. Найдите все тройки натуральных чисел, для которых выполнено условие: произведение любых двух из них, увеличенное на единицу, делится на оставшееся число.

Решение. Подходит только тройка $(1;1;1)$. Сначала заметим, что среди этих чисел не может быть чётных: если a – чётное, то $bc+1$ – нечётное. Теперь докажем, что эти числа должны быть взаимнопросты. Если это не так, то допустим НОД$(a,b)=m>1$, тогда $ac+1$ даёт остаток 1 при делении на m и, следовательно, не может делиться на b. Рассмотрим число $ab+ac+bc+1$. Оно делится на взаимнопростые числа a, b,

c (поскольку по условию произведение любых двух чисел, увеличенное на единицу, делится на третье число), следовательно, оно делится на abc. Тогда выражение $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}$ должно быть целым числом. Но это невозможно, поскольку сумма дробных частей в этой сумме строго меньше 1: если какие-то из чисел a, b, c больше единицы, то они больше или равны трём. **Ответ: (1;1;1).**