Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2019-2020 учебный год

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

11 класс

1. Ответ: 4.

Решение. $20^{50} \cdot 50^{20} = 20^{30} \cdot (20 \cdot 50)^{20} = 2^{30} \cdot 10^{30} \cdot 10^{60} = 2^{30} \cdot 10^{90}$. Таким образом, последней ненулевой цифрой данного числа является последняя цифра числа 2^{30}. Найдем последние цифры первых степеней двойки: 2^1 - 2, 2^2 – 4, 2^3 - 8, 2^4 - 6, 2^5 - 2. Далее последние цифры будут повторяться с периодом 4. Так как 30 = $4 \cdot 7 + 2$, то последней цифрой числа 2^{30} является 4.

Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ без обоснования – 1 балл.

2. *Решение.* Принцип Дирихле. Чисел от 400 до 600 ровно 201. Сумма любых двух из них больше 800. Разобьем выписанный ряд на тройки – таких троек будет ровно 200. Следовательно, какие-то два числа от 400 до 600 попадут в одну тройку. Рядом стоять они не могут. Значит, стоят через одного.

Критерий. Верное доказательство – 7 баллов; отмечено, что сумма любых двух чисел от 400 до 600 больше 800 – 2 балла; нет ссылки на принцип Дирихле – баллы не снижаем.

3. Ответ: второе число больше.

Первое решение. Очевидно, что если $k < m$, то $k^2 + \sqrt{k^2+k} < m^2 + \sqrt{m^2+m}$. Покажем, что если $n <$ p, $n^2 - \sqrt{n^2-n} < p^2 - \sqrt{p^2-p}$. Действительно, $p^2 - \sqrt{p^2-p} - (n^2 - \sqrt{n^2-n}) = (p^2-n^2) - \left(\sqrt{p^2-p} - \sqrt{n^2-n}\right) = (p^2-n^2) - \frac{(p^2-p)-(n^2-n)}{\sqrt{p^2-p}+\sqrt{n^2-n}} = (p^2-n^2)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{p^2-p}+\sqrt{n^2-n}}\right) + \frac{p-n}{\sqrt{p^2-p}+\sqrt{n^2-n}} > 0$, поскольку при $1 \le n < p$, знаменатели больше 1, и все разности положительны. Учитывая доказанные неравенства, достаточно показать, что требуемое неравенство выполняется для $n = m + 1$. Имеем $(m+1)^2 - \sqrt{(m+1)^2-(m+1)} - \left(m^2+\sqrt{m^2+m}\right) = 2m+1-2\sqrt{m^2+m} > 0$, так как $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 > 4m^2+4m = \left(2\sqrt{m^2+m}\right)^2$ и все числа положительные, то $2m+1-2\sqrt{m^2+m} > 0$.

Заметим, что неравенство $n^2 - \sqrt{n^2-n} < p^2 - \sqrt{p^2-p}$ достаточно было доказать для $p = n + 1$.

Второе решение. Для произвольных $m < n$ имеем $n^2 - \sqrt{n^2-n} - \left(m^2 + \sqrt{m^2+m}\right) = (n^2-m^2) - \left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{m^2+m}\right) = (n^2-m^2) - \frac{(n^2-m^2)-(n+m)}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{m^2+m}} = (n^2-m^2)\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{m^2+m}}\right) + \frac{(n+m)}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{m^2+m}}$. Если $n \ge m+2$, то нетрудно показать, что знаменатели больше 1, все разности положительны и неравенство выполняется. Но при $n = m+1$ знаменатель обращается в 0: $\sqrt{n^2-n} -$

$\sqrt{m^2+m} = \sqrt{(m+1)^2-(m+1)} - \sqrt{m^2+m} = \sqrt{(m+1)m} - \sqrt{m(m+1)} = 0.$
Поэтому этот случай необходимо рассматривать отдельно, как и в первом решении.

Критерии. Обоснованно получен ответ – 7 баллов; сравнение верно проведено только для соседних натуральных чисел – 4 балла; при сравнении в общем виде не рассмотрен случай соседних чисел - 3 балла.

4. Ответ: нет, не следует.

   Решение. Рассмотрим пирамиду *SABCD*, у которой основание *ABCD* является равнобокой трапецией, и центр *H* описанной окружности вокруг нее лежит вне этой трапеции. Пусть *SH* – высота пирамиды. Так как проекция вершины пирамиды на плоскость основания равноудалена от всех вершин основания, то все боковые стороны пирамиды равны между собой, то есть условие *SA* = *SB* = *SC* = *SD* выполнено. Далее, так как в равнобокой трапеции диагонали равны, то треугольники *ASC* и *BSD* равны по трем сторонам и все углы при основании этих равнобедренных треугольников равны. Поэтому, если O – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*, то условие $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$ тоже будет выполнено.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; замечено, что основание пирамиды – вписанный четырехугольник и вершина пирамиды проецируется в центр окружности – 2 балла; построен верный пример, но неопределенно положение точки *O* – 5 баллов.

5. Ответ: да, обязательно.

   Решение. Из условия следует, что уравнение $ax^2+bx+c=x \Leftrightarrow ax^2+(b-1)x+c=0$ не имеет решений. Это значит, что $a \neq 0$ и дискриминант квадратичного уравнения отрицательный. Следовательно, для любого x либо $P(x) > x$, если $a > 0$, либо $P(x) < x$, если $a < 0$. Таким образом, если $P(x) > x$ для любого x, то справедливы неравенства $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots) > \underbrace{P(P(\dots P}_{2018}(x)\dots) > \dots > P(x) > x$.
   Если $P(x) < x$, то аналогично $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots) < \underbrace{P(P(\dots P}_{2018}(x)\dots) < \dots < P(x) < x$.
   В обоих случаях уравнение $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots) = x$ не имеет решений.

   Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов; не отмечено, что $a \neq 0$ - минус 1 балл; доказано, что для любого x либо $P(x) > x$, либо $P(x) < x$ - 2 балла.