Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап 2019–2020 уч. г.

7 класс

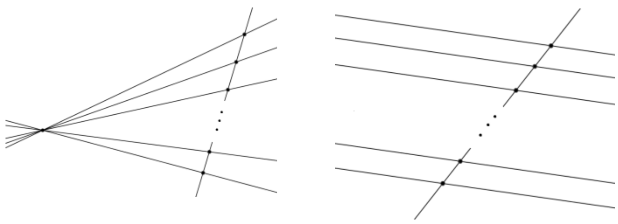
7.1. Младший брат доходит до школы за 25 минут, а старший брат по той же дороге – за 15 минут. Через сколько минут после выхода из дома младшего брата его догонит старший брат, если он вышел на 8 минут позже младшего?

Ответ. через 17 минут. **Решение.** Обозначим через S расстояние от дома до школы. Так как младший брат проходит это расстояние за 25 минут, то за 8 минут он пройдет путь $\frac{8S}{25}$. После момента выхода из дома старшего брата скорость сближения братьев будет равна $\frac{S}{15}-\frac{S}{25}=\frac{2S}{75}$. Для того, чтобы найти время с этого момента до встречи, разделим расстояние между ними на скорость сближения. Получим $\frac{8S}{25}:\frac{2S}{75}=12$ (минут). С учетом задержки на 5 минут, получаем ответ 17 минут (и т.к. это меньше 25 минут, старший брат успевает догнать младшего).

7.2. Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на 10%, а другую (длину) – на 20%. **а)** На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? **б)** Найдите отношение сторон исходного прямоугольника, если известно, что периметр нового прямоугольника на 18% больше периметра исходного.

Ответ. а) на 32%; **б)** 1:4. **Решение. а)** Пусть a и b – стороны исходного прямоугольника. Тогда стороны нового прямоугольника равны $1{,}1a$ и $1{,}2b$, а его площадь $S=1{,}1a\cdot 1{,}2b=1{,}32ab$, что составляет 132% от площади исходного прямоугольника. Таким образом, площадь увеличилась на 32%. **б)** Из условия задачи следует равенство $2(1{,}1a+1{,}2b)=2(1{,}18(a+b))$, из которого получаем $0{,}02b=0{,}08a$. Следовательно, отношение сторон равно $\frac{a}{b}=\frac{0{,}02}{0{,}08}=\frac{1}{4}$.

7.3. На плоскости провели 100 прямых. Могло ли число всех точек пересечения равняться **а)** 100? **б)** 99?



Ответ. а) да, могло; **б)** да, могло. **Решение.** Можно привести такие примеры (см. рис). **а)** Построим пучок из 99 прямых, проходящих через одну точку, и сотой прямой пересечём все 99 прямых. **б)** В этом случае проведём 99 параллельных прямых и пересечём их сотой прямой. Можно привести для пункта **б)** и другой способ: для этого немного изменим пример пункта **а),** а именно**,** проведём сотую прямую параллельно одной из прямых пучка.

7.4. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Существует ли такое n, что $n\cdot s(n)=100200300$?

Ответ. Не существует. **Решение.** По признаку делимости на 3 (и на 9) числа n и $s(n)$ либо оба делятся на 3 (на 9), либо оба не делятся на 3 (соответственно, на 9). Рассмотрим сначала первый случай, когда n и $s(n)$ делятся на 3. Тогда произведение $n\cdot s(n)$ делится на 9. Во втором случае n и $s(n)$ не делятся на 3, и тогда произведение $n\cdot s(n)$ не делится на 3. С другой стороны, число 100200300 делится на 3, но не делится на 9, т.к. сумма цифр этого числа равна 6. Значит, такого n не существует.

7.5. Петя говорит соседу Вове: «В нашем классе 30 человек и наблюдается интересная ситуация: у любых двух мальчиков разное число подруг в классе, и у любых двух девочек разное число друзей среди мальчиков класса. Сможешь ли ты определить, сколько у нас в классе мальчиков и сколько девочек?» Вова отвечает: «Ты, наверное, путаешь, не может быть такой ситуации!». **а**) Прав ли Вова? **б**) А как бы вы ответили на вопрос Пети?

Ответ. а) Вова неправ; **б)** 15 мальчиков и 15 девочек. **Решение. а**) Для того, чтобы показать, что Вова неправ, приведем пример класса, удовлетворяющего условиям задачи. Для класса с 15 девочками и 15 мальчиками пронумеруем их и приведём таблицу «дружб». В клетках таблицы стоит «+», если соответствующие мальчик и девочка дружат. Легко видеть, что таблица, представленная на рисунке, удовлетворяет условиям задачи. **б**) Покажем, что в условиях ситуации, указанной Петей, количество мальчиков и девочек должно быть одинаковым. Предположим противное и будем считать, например, что мальчиков больше, чем девочек. Тогда мальчиков в классе не менее 16. Однако число подруг каждого мальчика может принимать не более 15 значений (от 0 до 14). Значит, не у всех мальчиков разное число подруг. Противоречие доказывает наше утверждение.

	М1	М2	М3	…	М14	М15
Д1	+	+	+		+	+
Д2		+	+		+	+
Д3			+		+	+
…						
Д14					+	+
Д15						+