7-й класс

7.1 Четыре царевны загадали по двузначному числу, а Иван загадал четырехзначное число. После того, как они написали свои числа в ряд в каком-то порядке, получилось 132040530321. Найдите число Ивана.

Ответ: 5303

Решение: Переберем варианты. Вариант 1320 не подходит по причине того, что остальная часть длинного числа разбивается на фрагменты из двух соседних цифр: 40,53,03,21, а фрагмент 03 невозможен, так как не является двузначным числом. Вариант 3204 невозможен из-за недопустимого фрагмента 05 (или из-за фрагмента 1 из одной цифры). Вариант 2040 дает фрагмент 03, что невозможно. Вариант 0405 – не вариант – это трехзначное число. Вариант 4053 дает невозможный фрагмент 03. Вариант 0530 невозможен. Вариант 5303 – единственный возможный, так как вариант 3032 приводит к фрагменту из одной цифры 1.

7.2 Три числа x,y,z удовлетворяют соотношению $x^2+y^2=xy\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x или y равно произведению двух других чисел.

Решение. По условию

$$x^2-xyz+y^2-\frac{xy}{z}=0,$$

$$x(x-yz)-y\left(\frac{x}{z}-y\right)=0,$$

$$x(x-yz)-\frac{y}{z}(x-yz)=0,$$

$$(x-yz)\left(x-\frac{y}{z}\right)=0.$$

Поэтому обязательно либо $x-yz=0$, либо $x-\frac{y}{z}=0$, т.е. $y-xz=0$.

7.3 Известно, что для некоторого натурального числа n каждое из чисел $3n-1$ и $n-10$ делится на простое число p. Найдите число p.

Ответ: 29

Решение. На p делится число $3n-1-3(n-10)=29$. Так как 29 – простое число, то $p=29$.

7.4 В классе больше 30 человек, но меньше 40. Любой мальчик дружит с тремя девочками, а любая девочка – с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

Ответ: 32

Решение. Пусть m – число мальчиков, d – число девочек, r – число дружащих пар «мальчик-девочка». По условию $r=3m$ и $r=5d$. Значит, r делится на 3 и 5 и таким образом на 15: $r=15k$. Тогда $m=5k$, $d=3k$, а общее число учеников равно $m+d=8k$, т.е. делится на 8. Единственным числом между 30 и 40, кратным 8, является 32.

7.5 В клетках квадрата 3×3 Петя расставил числа 1,2,3,…,9 (каждое по одному разу), а затем посчитал суммы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей. Могли ли эти 8 сумм оказаться равными 13,14,…,20?

Ответ: нет

Решение. Допустим, что могли. Пусть a_1, a_2, a_3 − суммы по трем строкам. Сумма $a_1 + a_2 + a_3$ − это сумма всех чисел в квадрате, т.е. $1+2+3+...+9=45$. Аналогично, если b_1, b_2, b_3 − суммы по столбцам, то $b_1 + b_2 + b_3 = 45$. Поэтому $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 90$. С другой стороны, числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ − это какие-то числа из набора чисел 13,14,…,20 − по предположению. Тогда их сумма не меньше, чем $13+14+15+16+17+18=93$. Это дает противоречие с нашим допущением.