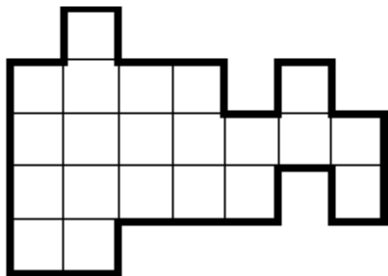
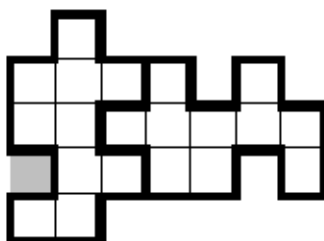


7 класс

1. Разделите фигуру по границам клеток на две равные части, предварительно вырезав одну клетку. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать.



Решение. Один из возможных способов:



2. Можно ли расставить в квадратике 3×3 цифры 2, 0, 1, 9 (одна цифра в одной клетке) так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях было по три различных цифры? Приведите пример или объясните, почему нельзя.

Решение. Ответ: нельзя. Рассмотрим угловые и центральную клетку квадрата 3×3 (всего 5 клеток). Любые две из этих клеток лежат либо в одном столбце, либо в одной строке, либо на одной диагонали. Поскольку клеток всего 5, а различных цифр для их заполнения 4, по принципу Дирихле найдется две из этих клеток, в которых стоит одна и та же цифра.

3. Школьники едят шоколад из новогодних подарков. Каждая шоколадка состоит из 12 долек. Выяснилось, что если каждая девочка съест по 7 долек, а каждый мальчик по 2, то трех шоколадок не хватит. Если же взять четыре шоколадки, то каждой девочке хватит по 8 долек, а каждому мальчику – по 4 дольки, и еще останется. Сколько среди этих школьников мальчиков и девочек?

Решение. Ответ: один мальчик и пять девочек. Пусть мальчиков m , а девочек d . По условию, $7d + 2m > 36$ и $8d + 4m < 48$. Из второго неравенства $4d + 2m < 24$, то есть $2m < 24 - 4d$. Тогда из первого неравенства $36 < 7d + 2m < 7d + 24 - 4d$ или $3d > 12$. Значит, $d > 4$. С другой стороны, из второго неравенства $8d < 48$ или $d < 6$. Таким образом, может быть только $d = 5$. В этом случае исходные неравенства имеют вид $2m > 1$ и $4m < 8$. Подходит только $m = 1$.

4. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда говорят ложь. Может быть, за столом есть демон: сам демон только лжет, но все его считают рыцарем. Когда начали спрашивать сидящих за столом, 10 из них сказали: «Мой сосед слева – лжец», остальные же сказали «Мой сосед слева – рыцарь». Можно ли по таким ответам определить, есть ли за столом демон?

Решение. Демона за столом нет. Докажем это.

Сначала рассмотрим случай, когда демона нет за столом. Фраза «Мой сосед слева – лжец», независимо от того, кем она сказана (рыцарем или лжецом), говорит о том,

что в паре из говорящего и его соседа слева есть один рыцарь и один лжец. Для фразы же «Мой сосед справа – рыцарь» эти оба участника будут два рыцаря или два лжеца. То есть, если демона нет за столом, то группы рыцарей и лжецов сменяют друг друга (четное число раз, так как стол круглый).

Пусть теперь демон за столом есть. Рассмотрим его соседей и фразы «Мой сосед слева – лжец», которые они могли бы говорить. Если «РДР», то будет сказана 1 фраза (без демона, то есть в случае «РР», было бы 0). Если «РДЛ», то будет сказано 2 фразы (без демона была бы 1). Если «ЛДР», то будет сказано 0 фраз (без демона была бы 1). Если «ЛДЛ», то будет сказана 1 фраза (без демона было бы 0). Таким образом, в присутствии демона, между кем бы он ни расположился, четность количества фраз «Мой сосед слева – лжец», сказанных всего, будет нечет. Но по условию сказано 10 таких фраз. Значит, демона за столом быть не может.

5. В кассе коммерческого директора Василия впервые за долгое время появились деньги – 2019 монет. К сожалению, известно, что одна из них фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих. Разгневанные работники, работающие на Василия, требуют немедленной выдачи зарплаты, причем настоящими монетами. У директора имеются чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо монеты настоящие, они выплачиваются очередным работникам и, естественно, в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Любопытный Василий хочет определить, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее. Сможет ли он наверняка это сделать?

Решение. Ответ: нет. Если каждое взвешивание будет давать равенство, то все использованные в нем монеты настоящие, то есть сразу должны быть отданы. После этого останется меньшее нечетное число монет. В конце концов, фальшивая монета останется последней, и ее вес Василий так и не узнает.