Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2019 – 2020 учебный год

Математика

8 класс

МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8.1. По кругу написано 2019 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

Решение. Сумма 2 чисел будет чётной, если они оба чётные или оба нечётные. Сумма 2 чисел будет нечётной, если одно из них будет чётное, а другое – нечётное. Допустим, что сумма любых 2 соседних чисел нечётна, тогда чётные и нечётные числа должны чередоваться. Значит, общее число чисел будет чётным, а по условию чисел 2019, – нечётное количество. Значит, допущение сделано неверно, и на самом деле найдутся 2 числа, сумма которых будет чётна.

8.2. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

Ответ: 21 конфета.

Решение: Обозначим через S общее число конфет, которые съели дети. Если один из детей съел a конфет, то по условию все остальные съели a +7 конфет, и тем самым все вместе съели $S = a + (a + 7) = 2a+7$ конфет. Такое рассуждение справедливо для каждого ребенка, поэтому все дети съели одно и то же количество конфет: по $a = (S - 7) / 2$ штук.

Обозначим теперь через N число детей. Тогда условие записывается как $a = a\cdot (N - 1) - 7$, откуда $7 = a\cdot (N - 2)$. Число 7 простое, поэтому один из сомножителей равен 1, а другой 7. Но по условию $a > 1$, поэтому $a = 7$, $N - 2 = 1$. Тем самым $N = 3$, и была съедена $S = a\cdot N = 21$ конфета.

8.3. Через точку B проведены четыре прямые так, что $AB \perp BD$, $BE \perp BC$, и проведена прямая AC, пересекающая данные прямые так, что $AB = BC$. Прямая AC пересекает BD в точке D), AC пересекает BE в точке E. Докажите, что $\Delta\ ABE = \Delta\ BCD$.

Решение. Так как $AB = BC$, то $\angle BAC = \angle BCA$ (см. рис.1). Далее, $\angle ABE = 90° - \angle EBD$, $\angle CBD = 90° - \angle EBD$. Отсюда $\angle A\,B\,E = \angle CBD$. Итак, имеем: $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle ABE = \angle CBD$. Значит, $\Delta ABE = \Delta BCD$.

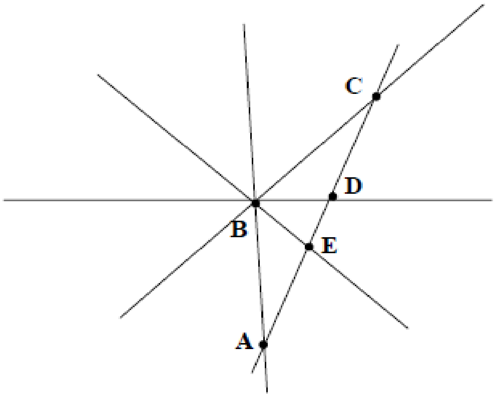

рис.1

8.4. ***а*)** Впишите в каждый кружочек (см. рис 2.) по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.
***б*)** Докажите, что задача имеет единственное решение.

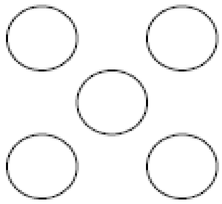
рис.2

Ответ. ***а*)** См. рис.3:

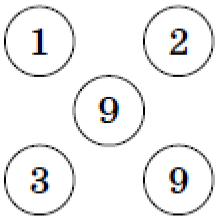

рис.3

Решение. ***б)*** Если сумма цифр в двух верхних кружочках в 7 раз меньше суммы остальных цифр, то она в 8 раз меньше суммы всех пяти цифр. Рассуждая так же, получим, что сумма цифр в двух левых кружочках в 6 раз меньше суммы всех пяти цифр. Значит, сумма всех цифр делится без остатка и на 6, и на 8. Минимальное такое натуральное число — это 24. Следующее число равно 48, но сумма всех пяти цифр не может превышать $5 \cdot 9 = 45$.

Итак, сумма всех цифр 24, сумма двух верхних $24 : 8 = 3$, сумма двух левых $24 : 6 = 4$. Легко видеть, что цифры в трех кружках слева и сверху можно разместить только двумя способами (см. рис.4),

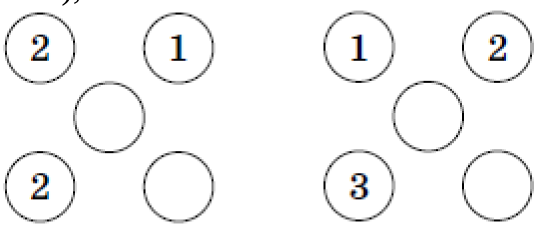

рис.4

причем в первом случае сумма двух остальных цифр равна 19, что невозможно, а во втором равна 18, что возможно, только если они обе девятки.

8.5. Расстановка шахматных королей на доске называется «правильной», если ни один из них не бьет другого, а каждое поле доски либо находится под боем, либо занято одним из королей. Какое минимальное и какое максимальное число королей можно правильно расставить на шахматной доске размером 8×8?

Ответ. Минимальное и максимальное число королей равно соответственно 9 и 16.
Решение. Разобьем доску на 16 квадратиков размером 2 × 2. В каждом из них может стоять не более одного короля, иначе они будут бить друг друга, поэтому их число при любой правильной расстановке не превосходит 16. Например, если в левом нижнем углу каждого квадрата разбиения стоит по одному королю.

Минимальное же число королей равно 9. Расширим шахматную доску до размеров 9×9, добавив мысленно вертикаль справа и горизонталь сверху. Разобьем полученную доску на 9 квадратов 3×3. Поставим в центр каждого из квадратов по королю. Тогда все клетки доски 9×9, а значит, и исходной доски оказались под боем. Видно, что эти 9 королей попали и на исходную доску, поэтому 9 королей хватит. Докажем, что 8 королей не хватит. Рассмотрим первые две горизонтали. На них должно располагаться не менее трех королей (иначе какие-то поля первой горизонтали не будут биты). Рассмотрим седьмую и восьмую горизонтали. Аналогично на них должно стоять не менее трех королей. Теперь рассмотрим 4 и 5 горизонтали. На них должно стоять тоже не менее трех королей, иначе не будут биты, например, все поля на 4-й горизонтали. Таким образом, королей должно быть не менее 9.