

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019-2020 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.
8-Й КЛАСС**

№ 1. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{20192019,2019 + \frac{19201920,1920}{20192019,2019} - \frac{20192019,2019 - \frac{19201920,1920}{20192019,2019}}{20192019,2019 - \frac{19201920,1920}{20192019,2019}} \right) \cdot \left(\frac{20192019,2019^2 - \left(\frac{19201920,1920}{20192019,2019} \right)^2}{19201920,1920} \right)$$

Решение:

Обозначим $20192019,2019 = a$, $\frac{19201920,1920}{20192019,2019} = b$. Тогда:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right) = \left(\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2 - b^2} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right) = \frac{4ab}{ab} = 4.$$

Ответ: 4.

Критерий:

7	решение верно доведено до конца независимо от того выполнялась ли замена
3	все выполнено верно, но при приведении подобных в числителе получилось $2ab$ (или $1ab$)
1	в решении выполнены все преобразования, кроме знаменателя последней дроби
0	только ответ; решение выполнялось без замены и не доведено до конца

№ 2. В Цветочном городе, каждый седьмой малыш – поэт, еще и механик, а каждый тринадцатый механик – еще и поэт. Кого больше в Цветочном городе механиков или поэтов?

Решение:

Пусть в городе m поэтов. Каждый седьмой поэт, еще и механик. То есть поэтов-механиков $\frac{m}{7}$.

Аналогично, пусть механиков n . А каждый тринадцатый механик – еще и поэт. То есть механиков-поэтов $\frac{n}{13}$. Но поэто-механики и механико-поэты – одни и те же люди,

поэтому

$$\frac{m}{7} = \frac{n}{13}, \text{ или } n = \frac{13}{7}m.$$

Ответ: механиков больше.

Критерий:

7	полное обоснованное решение
3-4	решение без пояснений
0	только ответ

№3. Даны две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Причем, $b > d > 0$ и $c > a > 0$. Что больше, среднее арифметическое этих дробей или дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Решение:

Рассмотрим разность

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) - \frac{a+c}{b+d} = \frac{(ad+bc)(b+d) - 2bd(a+c)}{2bd(b+d)}$$

Так как знаменатель последней дроби больше нуля, то знак определяется по знаку числителя.

$$(ad+bc)(b+d) - 2bd(a+c) = abd + bcd + b^2c + ad^2 - 2abd - 2bcd = b^2c + ad^2 - abd - bcd =$$

$$= bc(b-d) - ad(b-d) = (bc-ad)(b-d) > 0,$$

так как $b > d > 0$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, откуда $b-d > 0$ и $bc-ad > 0$.

Ответ: дробь $\frac{a+c}{b+d}$ меньше чем среднее арифметическое.

Критерий:

7	полное обоснованное решение
3-5	решение с небольшими погрешностями
0	только ответ или решение, содержащее математические ошибки

№4. Аня и Ваня живут на 11 этаже, 20-этажного дома, между первым и 20 этажами которого ходит лифт. Но лифт поломался, и при нажатии на любую кнопку или поднимается вверх на 9 этажей, или спускается на 5. Аня все равно решила ехать на лифте, а Ваня побежал вверх пешком. При этом на каждый следующий этаж он поднимался на 4 секунды дольше, чем на предыдущий. С 10 на 11 этаж Ваня поднимался 42 секунды. Кто раньше окажется дома и на сколько, если лифт поднимается или спускается на один этаж за 3 секунды?

Решение:

1. Найдем время, которое потратил Ваня.

От 10 до 11 этажа он дошел за 42 секунды, значит;

с 9 до 10 – 38 сек,

с 8 до 9 – 34 сек,

с 7 до 8 – 30 сек,

с 6 до 7 – 26 сек,

с 5 до 6 – 22 сек,

с 4 до 5 – 18 сек,

с 3 до 4 – 14 сек,

с 2 до 3 – 10 сек,

с 1 на 2 – 6 сек.

Всего: $42+38+34+30+26+22+18+14+10+6 = 240$ сек.

2. Найдем время, которое потратила Аня.

Рассмотрим какую-либо последовательность движений лифта, которая приведет ее на 11 этаж

(1) - +9 - (10) -5 - (5) - +9 - (14) - -5 - (9) - +9 - (18) - -5 - (13) - -5 - (8) - +9 - (17) - -5 - (12) - -5 - (7) - -5 - (2) - +9 - (11)

(В скобках указан номер этажа, на который приехал лифт)

Заметим, что на 11 этаж может привести нас только последовательность ходов, общее число этажей в которой равно +10. Так как мы можем только проехать или на 9 этажей вверх (+9), или на 5 этажей вниз (-5), то такая последовательность обязательно содержит 5 подъемов вверх (+5x9) и 7 спусков вниз (-7x5). При этом число подъемов спусков не зависит от их последовательности (является инвариантом). То есть $5 \times 9 - 7 \times 5 = 10$.

При этом, Аня проедет $45 + 35 = 80$ этажей (вверх и вниз). Всего она потратила на это $80 \times 3 = 240$ секунд.

Аня потратила 240 секунд и Ваня поднимался 240 секунд.

Ответ: одновременно.

Критерий:

7	полное решение
5	найдено время и Ани и Вани, дан верный ответ без обоснования единственности полученного результата для Ани
2	посчитано время только Вани (или только Ани)
0	только ответ, без решения, или логические описки в решении, приведшие к неверному ответу

№5. Из вершины В треугольника ABC опущены перпендикуляры BL и BK на биссектрисы внешних углов А и С соответственно. Доказать, что прямая LK параллельна стороне AC треугольника ABC.

Доказательство

Продлим перпендикуляры BL и BK до пересечения с продолжением стороны AB. Соответствующие точки назовем A1 и B1. Рассмотрим треугольник A1AB. Он равнобедренный. Действительно, угол $A1AL = BAL$ по построению, $A1LA = BLA = 90$, AL – общая, то треугольники A1AL и BAL равны. Следовательно A1AB – равнобедренный. Аналогично, C1CB – равнобедренный. Тогда, $A1L = LB$, $C1K = KB$. Отсюда, KL – средняя линия треугольника A1BC1. Следовательно, KL параллельна A1C1 и AC.

Критерий:

7	полное доказательство
5	доказательство в целом верное, с неточностями
0	нет доказательства или в доказательстве пропущены важные моменты (доказательство равнобедренности A1AB и C1CB)