8 класс

1. Можно ли расставить в квадратике 3×3 цифры 2, 0, 1, 9 (одна цифра в одной клетке) так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях было по три различных цифры? Приведите пример или объясните, почему нельзя.

Решение. Ответ: нельзя. Рассмотрим угловые и центральную клетку квадрата 3×3 (всего 5 клеток). Любые две из этих клеток лежат либо в одном столбце, либо в одной строке, либо на одной диагонали. Поскольку клеток всего 5, а различных цифр для их заполнения 4, по принципу Дирихле найдется две из этих клеток, в которых стоит одна и та же цифра.

2. Найдите самое большое положительное число, которое после стирания одной из цифр в десятичной записи может *удвоиться*.

Решение. Ответ: 0,375. Очевидно, что при стирании цифры в целой части положительного числа это число уменьшается. Поэтому стерта должна быть цифра из дробной части. Пусть сначала первая цифра x после запятой у исходного числа не 0. Тогда если будет стерта не первая цифра после запятой, то старое число не меньше $n+0,1x$, новое *меньше* чем $n+0,1(x+1)$ и число увеличивается менее чем в $\dfrac{n+0,1(x+1)}{n+0,1x} = 1 + \dfrac{0,1}{n+0,1x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} \leqslant 2$ раза. Из этой же оценки ясно, что обязательно $n = 0$. Итак, если первая цифра после запятой не 0, то стирать надо ее (чтобы могли выполняться условия). Пусть y – исходное число после замены на первом месте после запятой цифры x на 0. По условию, $10y = 2\left(\dfrac{x}{10} + y\right)$ или $x = 40y$. Поскольку $y < 0,1$, имеем $x < 4$. При максимальном значении $x = 3$ получим $y = \dfrac{3}{40} = 0,075$. Поэтому искомое число равно $0,375$. Это число, очевидно, больше любого числа с нужным нам свойством, у которого бы был 0 после запятой.

3. Чук и Гек должны разделить между собой треугольный торт. Гек поставил условие, что он прямолинейным разрезом отрежет свою часть, а Чук согласился на это с тем условием, что он заранее обозначит точку P, через которую должен пройти этот разрез. Торт имеет одинаковую толщину в любом месте и однороден по вкусу. Каковы должны быть стратегии Чука и Гека для получения максимально возможной части каждому. Какой величины излишек перепадет Геку при удачных стратегиях обоих?

Решение. Стратегия Чука – выбрать точку P в центре тяжести треугольника, стратегия Гека – резать параллельно какой-либо из сторон треугольника. Если оба будут придерживаться этих стратегий, то торт будет поделен между Чуком и Геком в отношении $4 : 5$.

4. Можно ли на доску 10×10 положить 9 костяшек домино размером 1×2 так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали они занимали нечетное количество клеток?

Решение. Ответ: нет. Предположим, что это можно сделать. Каждая доминошка лежит либо вертикально, либо горизонтально. Так как их 9, то доминошек какого-то типа (например, горизонтальных) не более четырех. Тогда они могут лежать не более чем в восьми столбцах. В оставшихся двух столбцах будут только вертикальные доминошки, то есть в каждом из них доминошками будет занято четное количество клеток. Противоречие.

5. Десять человек сидят за круглым столом. Каждый из них либо рыцарь (и говорит только правду), либо лжец (лжец всегда лжет). Каждый назвал лжецами четырех других людей из числа своих *несоседей* по столу (у каждого за столом два соседа). Докажите, что кто-то назвал лжецом человека, сидящего за этим столом напротив него.

Решение. Очевидно, что при наших условиях есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Следовательно найдется пара сидящих рядом людей такая, что один из них – рыцарь, а другой – лжец. Рыцарь мог обвинить во лжи только лжецов, и при этом не обвинял своего соседа. Следовательно, лжецов не менее 5. Аналогично, рыцарей не меньше 5. Всего у нас 10 человек – значит лжецов и рыцарей ровно по 5, и рыцарь, сидящий рядом со лжецом обвинил во лжи всех остальных лжецов. Следовательно, рыцарь не может сидеть между двух лжецов, и если рядом с этим рыцарем сидит лжец, то напротив этого рыцаря сидит рыцарь (иначе мы нашли того, кто обвинил сидящего напротив во лжи). Посмотрим на рыцаря №1, сидящего рядом с лжецом. С другой стороны от него сидит рыцарь №2. Напротив должен сидеть рыцарь №3, и рядом с ним так же должны сидеть лжец и рыцарь (№4). Рыцарь №5 не может сидеть между лжецами, то есть он сидит либо рядом с рыцарем №2, либо рядом с №4, но в любом случае получается, что он сидит рядом с лжецом, и напротив лжеца, а тогда ему придется обвинить во лжи сидящего напротив.