9 класс

9.1. К восьмизначному числу 20192020 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72. Укажите все возможные решения.

Ответ. 2201920200 или 3201920208**. Решение.** Поскольку $72=8\cdot 9$, то требуется приписать цифры так, чтобы полученное число делилось и на 8, и на 9. Делимость на 8 определяется тремя последними цифрами: к двадцати надо приписать справа цифру так, чтобы получилось трёхзначное число, кратное 8. Это можно сделать двумя способами: получим 200 или 208. После этого первую цифру искомого числа определяем по признаку делимости на 9 (сумма цифр должна делиться на 9). Таким образом, эта цифра будет, соответственно, 2 или 3.

9.2. Длины a, b, c сторон треугольника удовлетворяют неравенству $c^2+ab<ca+cb$. Докажите, что угол, лежащий против стороны *c*, острый.

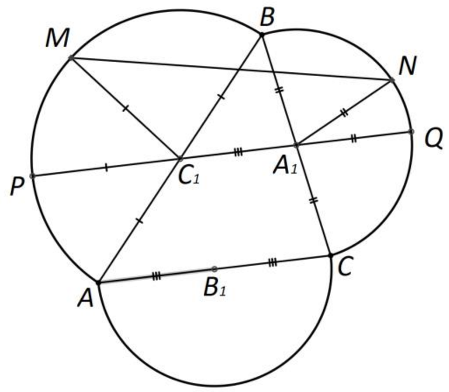
Решение. Неравенство перепишем в виде $(c-a)(c-b)<0$. Значит, $a\neq b$, и число c лежит в интервале между a и b. Если бы против стороны c лежат прямой или тупой угол, то длина c была бы наибольшей. Значит, угол, лежащий против стороны c, острый.

9.3. График приведенного квадратного трехчлена (парабола) с целыми коэффициентами касается оси Ox. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами (a,b), что график $y=x^2+ax+b$ тоже касается оси Ox.

Решение. Пусть $x^2+px+q-$ данный трёхчлен. Тогда $p^2-4q=0$ по условию касания графика оси Ox (это условие равносильно тому, что дискриминант трёхчлена равен нулю). Заметим, что точка с координатами $(-p,q)$ лежит на графике трёхчлена, т.к. $(-p)^2+p(-p)+q=q$. Эта точка имеет целые координаты, а дискриминант трёхчлена $y=x^2+(-p)x+q$, т.е. $(-p)^2-4q$, равен нулю. *Замечание.* Можно прийти к такому решению (т.е. нахождению указанной точки), если записать в виде уравнения условие нулевого дискриминанта для трехчлена, построенного по искомой точке.

9.4. Дан треугольник со сторонами *a,b,c*. На его сторонах как на диаметрах построили полукруги во внешнюю сторону и получили фигуру Ф, составленную из треугольника и трёх полукругов. Найдите диаметр Ф (диаметр множества на плоскости – это наибольшее расстояние между его точками).

Ответ. $\frac{a+b+c}{2}$**. Решение**. Пусть A_1, B_1, C_1 – середина сторон *BC, AC* и *AB* соответственно. Очевидно, что если *MN* – диаметр фигуры Ф, то *M* и *N* – точки на границе Ф (иначе отрезок *MN* можно было бы продолжить до границы). Могут быть два случая: 1) *M* и *N* – точки одной полуокружности, построенной, скажем, на *AB*, и 2) *M* и *N* принадлежат двум разным полуокружностям, построенным, скажем, на *AB* и *BC*. В первом случае, очевидно, длина отрезка *MN* не превосходит длины *AB*. Во втором случае проведем прямую C_1A_1 и точки пересечения с полуокружностями обозначим *P* и *Q*. Тогда *MN* не превосходит длины ломаной MC_1A_1N, а эта длина равна *PQ*. Таким образом, во втором случае *MN* достигает наибольшего значения, равного *PQ*, когда *M* совпадает с *P*, а *N* совпадает с *Q*. Длина *PQ* равна полупериметру треугольника *ABC*, т.к. $PC_1 = \frac{AB}{2}$, $A_1Q = \frac{BC}{2}$, а $A_1C_1 = \frac{AC}{2}$ по свойству средней линии треугольника. Поскольку полупериметр треугольника больше любой стороны (в силу неравенства треугольника), получаем, что на самом деле имеет место второй случай, причем возможны ровно три положения отрезка *MN*, при которых длина *MN* достигает значения полупериметра треугольника *ABC* (для каждой пары полуокружностей).



9.5. 20 чисел: 1, 2, …, 20 разбили на две группы. Оказалось, что сумма чисел первой группы равна произведению чисел второй группы. **а)** Какое наименьшее и **б)** какое наибольшее количество чисел может быть во второй группе?

Ответ. а) 3; **б)** 5. Решение. См. задачу 8.5**.**