Решение 9 класс

1. Ответ. 9.

Заметим, что все 10 не могли сказать такую фразу. Так как за столом есть и рыцарь, и лжец, то найдутся лжец и рыцарь, сидящие рядом. Но тогда у этого рыцаря не оба соседа рыцари. Если же за столом сидит 9 лжецов и 1 рыцарь, то каждый из этих 9 лжецов мог

сказать фразу «Оба моих соседа – рыцари», так как у каждого лжеца среди соседей есть лжец.

2. Первое решение. Перенесем все в левую часть: $(x+a)(x+b)-(2x+a+b)=0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^2+(a+b-2)x+ab-a-b=0$. Посчитаем дискриминант получившегося квадратного уравнения. Он равен

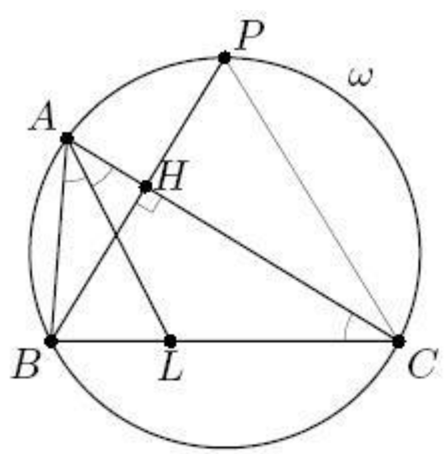
$D=(a+b-2)^2-4(ab-a-b)=a^2+b^2-2ab+4=(a-b)^2+4>0$. Значит, уравнение имеет два

различных корня.

Второе решение. Рассмотрим приведенный квадратный трехчлен $f(x)=(x+a)(x+b)-(2x+a+b)$. То есть уравнение из условия эквивалентно $f(x)=0$. Заметим, что $f(-a)=a-b$ и $f(-b)=b-a$. Так как $a\neq b$, в одной из этих точек значение этого приведенного трехчлена отрицательно. Значит, у трехчлена есть ровно два корня.

3. Обозначим $\alpha=\angle BAL$. Тогда $\angle CAL=\alpha$, и, по условию, $\angle BLA=2\alpha$. Так как $\angle BLA$ – внешний в треугольнике ALC , получаем $\angle ACL=\angle BLA-\angle CAL=\alpha$ (см. рис.).

Из прямоугольного треугольника BHC теперь получаем $\angle CBH=90-\alpha$. Так как точка P лежит на ω, имеем $\angle BPC=\angle BAC=2\alpha$. Значит, $\angle PCB=180-\angle CBP-\angle BPC=180-(90-\alpha)-2\alpha=90-\alpha=\angle CBP$. Отсюда и следует, что треугольник PBC равнобедренный, $BP=CP$.



4. Ответ. Не существует.

Предположим, что требуемое число существует. Тогда у него все цифры различны, поскольку все остатки при делении на них различны. Значит, число состоит из цифр от 1 до 9, каждая использована по одному разу. Поэтому сумма его цифр равна 45. Но тогда оно

делится и на 3, и на 9 (а также на 1), то есть имеет одинаковые (нулевые) остатки при делении на эти цифры. Противоречие.

5. Ответ. Выигрывает второй.

Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце, кроме средних, по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну.Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. Каждым своим ходом ему следует ставить нолик в клетку, симметричную клетке, в которую только что поставил крестик первый игрок, относительно центра доски (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет равно количеству столбцов, в которых больше ноликов.Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. Центральная клетка (центр таблицы) вырезана. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Эта строка не даёт преимущества первому игроку. Аналогично, средний столбец не даёт преимущества второму игроку.Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов. Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = B = 5$ и второй выиграет.