Решения задач

1. Сначала вычислим, сколько существует способов выбрать три точки из 60 имеющихся. Первую точку мы выбираем 60 способами, вторую 59, третью – 58; в результате получаем 205320=60·59·58 вариантов. Поскольку выборки вершин ABC, ACB, CBA, CAB, BAC, BCA дают один и тот же треугольник, то количество способов выбрать три точки без учета порядка их выбора равно 205320:6=34220. Нас не устроят только те тройки точек, которые лежат на одной прямой. Таких троек ровно 30. Таким образом, существует 34220-30 = **34190** способов построить данные треугольники.

Ответ: **34190**

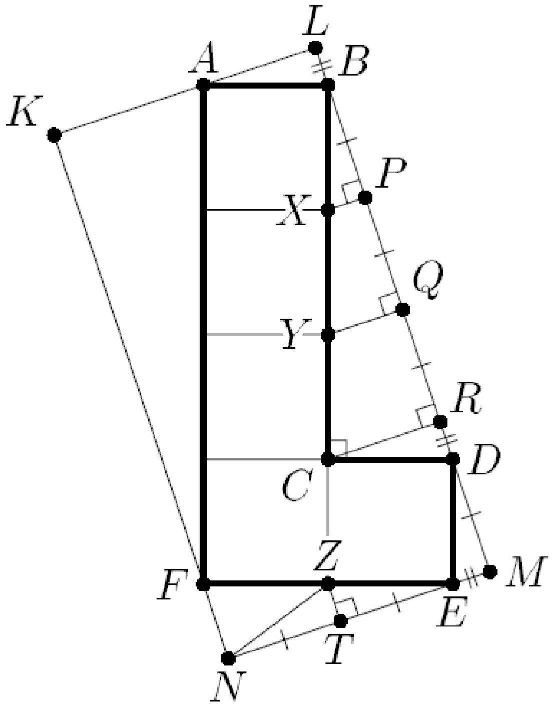
Рекомендации к оцениванию решений: *определить, сколько существует троек точек, можно, используя формулу числа сочетаний* $C_{60}^3 = \frac{60!}{3!57!} = 34220$.

2. **Первый способ:** Найдем цифры a, b, c, такие чтобы число $\overline{387abc}$ делилось бы на 5,6 и 7. Любое четное число кратное 5 заканчивается на 0, значит c=0. Для делимости на 3 необходимо, чтобы $3+8+7+a+b=18+a+b$ делилось бы на 3. Так как 18 кратно 3, то $a+b$ должно быть кратным 3. Возьмем самое меньшее из чисел, делящихся на 6 и 5 – это будет число **387030**. Прямая проверка показывает, что это число делится и на 7, а значит, является искомым. Если добавить к этому числу 210=5·6·7, то характер его делимости на 5,6 и 7 не изменится. Поэтому **387240**, **387450**, **387660**, **387870** также являются решениями.
   Второй способ: Число, делящееся на 5, 6 и 7 делится на 210=5·6·7 и имеет вид $210k$. Подберем k так, чтобы $387000 \le 210k \le 387999$. Получаем k=1843, …1847.

Ответ: **387030, 387240**, **387450**, **387660**, **387870.**

Рекомендации к оцениванию решений: *Возможно, учащиеся найдут только одно или несколько решений. В случае, если найдено только одно решение, задача оценивается в 3 балла, если несколько, но не все – в 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.*

3. Введем обозначения для некоторых точек шестиугольника и вершин прямоугольника, как показано на рисунке.
   - Проведем прямые XP, YQ, CR, параллельные стороне KL. Тогда по теореме Фалеса отрезки BP=PQ=QR=DM=y.
   - Опустим перпендикуляр ZT на сторону AM.
   - Обозначим длину стороны BL за x.
   - Треугольник ALB равен треугольнику DME: AB=DE, DE⊥AB, а значит, $\angle DEM=90^0-\angle LBA=\angle LAB$. Аналогично устанавливается равенство треугольников BPX, ALB, DEM, ETZ, NTZ.
   - Таким образом, большая сторона прямоугольника равна 4y+2x, а меньшая 2y+x.
   - Отношение сторон **2:1**



Ответ: **2:1**

4. Решить эту задачу можно аналитическим и графическим способом.

Аналитический способ:

$$|2-|x||+a=3$$

1) Если $3 - a < 0$, т.е. $a > 3$, то решений нет
2) Если $3 - a = 0$, т.е. $a = 3$, то уравнение имеет ровно 2 решения.
3) Если $a < 3$, то уравнение равносильно совокупности

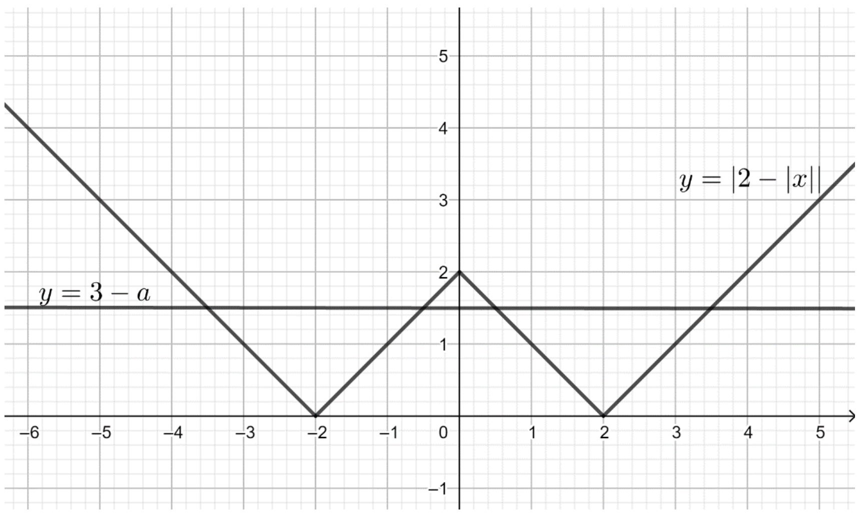
$$\left[\begin{array}{l}|x| = 5 - a,\\ |x| = a - 1.\end{array}\right.$$

Четыре решения данная совокупность уравнений будет иметь тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 5 - a > 0,\\ a - 1 > 0,\\ 5 - a \neq a - 1.\end{cases}$$

Графический способ

Графики функций $y = |2 - |x||$ и $y = 3 - a$ пересекаются в четырех точках, если и только если $0 < 3 - a < 2$.



Ответ: **(1;3)**

5. Докажем утверждение, используя индукцию по количеству мест в одном ряду. Если каждый ряд состоит из одного места и в театр привели по одному школьнику из каждого класса, то очевидно, что мешать друг другу они не будут. Предположим, что для k мест в ряду и k школьников в каждом классе наше утверждение верно. Докажем, что оно верно и для k+1 места. Пусть в театр пришло по (k+1) школьнику из каждого класса. Если каждый класс занял по одному ряду, то утверждение очевидно. Если нет, то хотя бы на двух рядах сидят ученики хотя бы двух разных классов, а значит, внутри каждого ряда можно сделать перестановку так, чтобы учащиеся, сидящие на крайних левых местах рядов, не мешали бы друг другу. (*Так, если в первом ряду все учатся в 1ом классе, а во втором и третьем есть ученики 2 и 3-его, это утверждение очевидно. Если в каждом ряду есть учащиеся как минимум двух классов, то в одном ряду - это 1 и 2, в другом 2 и 3, в третьем 1 и 3, утверждение также очевидно. Если в каких то рядах есть ученики 1,2 и 3 классов, то, очевидно, такая пересадка тоже возможна*.) После этого остается пересадить детей на k местах, что возможно согласно индуктивному предположению.

Рекомендации к оцениванию решений: *Возможно, учащиеся не будут доказывать это утверждение, используя прямо понятие индукции. Они могут показать, как пересадить первых трех, так чтобы они друг другу не мешали, пересадить следующих и сказать, что далее можно действовать по аналогии. Если в рассуждениях о пересаживании детей на первом – втором шаге нет логических ошибок, то такое доказательство следует зачесть как верное.*

Возможно, что многие будут приводить пример пересаживания школьников в одном конкретном случае. Это не является решением задачи – оценка ***0*** *баллов*