Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2019 – 2020 учебном году
Критерии оценивания

9 класс

Максимальное количество баллов – 35.

Необходимо учитывать следующее:

1) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

2) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

3) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

4) Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Длины сторон прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами. Докажите, что хотя бы одна из сторон делится на 2, и хотя бы одна из сторон делится на 3.

Решение.

Пусть a и b – катеты, c – гипотенуза. Тогда $b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$.
Рассмотрим «худшие» из возможных вариантов.
Если $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$ оба нечетны, то их разность и сумма четны, следовательно, b^2 – четно, и $\boldsymbol{b}$ – четно.

Если a и b оба не делятся на 3, то их остатки при делении на 3 могут быть или 1, или 2. При одинаковых остатках $(c-a)$ делится на 3, тогда b^2 делится на 3, и $\boldsymbol{b}$ делится на 3. При разных остатках $(c+a)$ делится на 3, и, в конечном счете, $\boldsymbol{b}$ тоже делится на 3.

2. **На основании АС равнобедренного треугольника АВС взята точка Е, а на боковых сторонах АВ и ВС – точки К и М так, что КЕ параллельна ВС и ЕМ параллельна АВ. Какую часть площади треугольника АВС занимает площадь треугольника КЕМ, если ВМ : ЕМ = 2 : 3?**

Ответ: $\frac{6}{25}$.

Решение.

Четырехугольник ВКЕМ – параллелограмм. Треугольники АКЕ и ЕМС равнобедренные. Каждый из них подобен треугольнику АВС с коэффициентами подобия, равными $\frac{KE}{BC}=\frac{2x}{2x+3x}=\frac{2}{5}$ и $\frac{MC}{BC}=\frac{3x}{2x+3x}=\frac{3}{5}$. Поэтому $S_{KME}=\frac{1}{2}S_{BKEM}=\frac{1}{2}(S_{ABC}-S_{AKE}-S_{EMC})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{25}-\frac{9}{25}\right)S_{ABC}=\frac{6}{25}S_{ABC}$.

3. **Три бригады, работая вместе, должны выполнить некоторую работу. Известно, что первая и вторая бригады вместе могут выполнить ее на 36 минут быстрее, чем третья бригада. За то время, за какое могут выполнить эту работу вместе первая и третья бригады, вторая бригада может выполнить только половину работы. За то время, за какое эту работу могут выполнить вместе вторая и третья бригады, первая может выполнить $\frac{2}{7}$ этой работы. За какое время выполнят работу все три бригады вместе?**

Ответ: за 1 ч 20 мин.

Решение.

Пусть x, y, z – производительность соответственно первой, второй и третьей бригад, то есть часть работы, которую выполняет бригада за 1 час. Используя первое условие задачи, составим уравнение. Так как у первой и второй бригад, работающих вместе, производительность равна $(x+y)$, то всю работу они выполнят за $\frac{1}{x+y}$ ч. Одна третья бригада работу выполнит за $\frac{1}{z}$ ч. Имеем: $\frac{1}{x+y}+\frac{3}{5}=\frac{1}{z}$.

Аналогично, используя остальные условия задачи, получим систему: $\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{3}{5}=\frac{1}{z}\\ \frac{1}{x+z}=\frac{1}{2y}\\ \frac{1}{y+z}=\frac{2}{7x}\end{cases}$.

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{3}{5}=\frac{1}{z}\\ x+z=2y\\ 2y+2z=7x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{3}{5}=\frac{1}{z}\\ z=2y-x\\ 2y+2(2y-x)=7x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{3}{5}=\frac{1}{z}\\ z=2x\\ y=1{,}5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x+1{,}5x}+\frac{3}{5}=\frac{1}{2x}\\ z=2x\\ y=1{,}5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{4}\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Таким образом, все три бригады вместе выполняют работу за $\frac{1}{x+y+z}$ ч, то есть за 1 ч 20 мин.

4. **Решить уравнение:** $\mathbf{3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 20y + 11 = 0}$**.**

Ответ: ***x*** = 3, ***y*** = 2

Решение.

Рассмотрим уравнение как квадратное относительно ***x***, а ***y*** будем считать параметром. Уравнение $3x^2 - 6x(2y-1) + 14y^2 - 20y + 11 = 0$ имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицательный, т.е. $D = 36(2y-1)^2 - 12(14y^2 - 20y + 11) \geq 0$. после преобразования получим: $y^2 - 4y + 4 \leq 0$. Откуда ***y*** = 2. Заменив переменную ***y*** в уравнении найденным значением 2, получим квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 9 = 0$. Откуда ***x*** = 3. Таким образом, решение уравнения: ***x*** = 3, ***y*** = 2.

5. **В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, три шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 130 встреч. Сколько шахматистов участвовало в турнире?**

Ответ: 19 человек.

Решение.

Если в турнире участвовало 16 шахматистов, то число сыгранных ими партий не должно превосходить (16х15):2=120 партий. Поэтому в турнире играло больше 16 человек. Рассмотрим следующие случаи.

А) турнир начало 17 участников. Тогда 14 из них, закончивших турнир, провели между собой (14х13):2=91 встречу, а выбывшие провели вместе 39 встреч. Следовательно, кто-то из них провел не менее 13 встреч, т.е. выбыл во второй половине турнира. Противоречие с условием.

Б) турнир начало 18 участников. Тогда 15 из них, закончивших турнир, провели между собой (15х14):2=105 встреч, а выбывшие провели вместе 25 встреч. Поскольку половина турнира составляет 8 туров, то выбывшие участники не могли вместе провести более 24 встреч.

В) турнир начало 19 участников. Тогда 16 из них, закончивших турнир, провели между собой (16х15):2=120 встреч, а выбывшие провели вместе 10 встреч. Каждый из них мог выбыть в первой половине турнира.

Г) турнир начало 20 участников. Тогда 17 из них, закончивших турнир, провели между собой (17х16):2=136 встреч, т.е. больше, чем все участники турнира.

Следовательно, в турнире участвовало 19 человек.