

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019-2020 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.**

9-Й КЛАСС

№1. Существуют ли такие натуральные числа x и y , что выполняется условие $x^2 + y^2 = x^3 - y^3$?

Решение:

$x^2 + y^2 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$. Т.к. x больше y , то правая часть больше $x^2 + y^2$.

Значит нет таких натуральных чисел.

№2. Внуки рассказали деду историю: «Папа, мама, две дочки и два сына собирали яблоки. У всех оказалось различное количество яблок. Затем посчитали рейтинги троек. Рейтингом назовём сумму яблок, собранных одним из родителей с двумя детьми одного пола. Среди четырёх рейтингов два оказались равными, а два других отличались на единицу друг от друга». Дед задумался и сказал: «Такого быть не могло!». Прав ли дед?

Решение:

Пусть папа, мама, сыновья и дочери собрали соответственно x , y , a , b , m и n яблок. Тогда возможны варианты:

1 случай. $x + (a+b) = x + (m+n)$ и $y + (a+b) = y + (m+n) + 1$.

Отсюда: $a+b = m+n$ и $a+b = m+n + 1$, что невозможно.

2 случай. $x + (a+b) = y + (m+n)$ и $x + (m+n) = y + (a+b) + 1$.

Отсюда: $2x = 2y + 1$, что невозможно.

Ответ: дед прав.

№3. Доказать, что один из корней уравнения $bx + c - ax^2 = 0$ больше 1, а другой меньше 1, где a , b и c – длины сторон треугольника.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = -ax^2 + bx + c$.

$f(1) = -a + b + c = (b+c) - a > 0$, $f(-1) = -a - b + c = c - (a+b) < 0$.

Значит, один из корней принадлежит интервалу $(-1; 1)$, а т.к. ветви вниз, то второй корень больше 1.

№4. Вне параллелограмма ABCD взята точка E так, что DE и AC параллельны, углы BEC и CED равны. Угол BCD – тупой. Доказать, что прямые EC и BC перпендикулярны.

Решение: продлить прямую BC до пересечения с прямой ED в точке K. ACKD – параллелограмм, поэтому BC = AD = CK. Значит биссектриса EC является медианой, а, следовательно, и высотой треугольника BEK.

№5. В математический кружок приняли только часть учеников из девятого класса, причём число процентов не принятых в кружок учеников, оказалось равно числу учеников в кружке. Какое наименьшее число учеников могло быть в девятом классе?

Ответ: 25.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит не принципиальные ошибки, либо не рассмотрены отдельные частные случаи. (Решение может стать правильным после небольших исправлений или дополнений)
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Решение в целом неверно, но содержит значительные продвижения в верном направлении. Верно, рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно, получена оценка. Доказано вспомогательное утверждение, помогающее в решении задачи
1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Решение считается неполным, если оно:

- содержит основные идеи, но не доведено до конца;
- при верной общей схеме рассуждений содержит пробелы, то есть явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя считать очевидными.