9-й класс

9.1 Докажите, что для любой возрастающей линейной функции $f(x)$ найдется такая возрастающая линейная функций $g(x)$, что $f(x) = g(g(x))$.

Решение. Пусть $f(x) = kx + \ell$. Возрастание $f(x)$ означает, что $k > 0$. Пусть $g(x) = ax + b$. Найдем подходящие a и b. Имеем: $g(g(x)) = ag(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$. Достаточно (и необходимо) взять $a^2 = k$ и $ab + b = \ell$. Находим $a = \sqrt{k}$, $b = \dfrac{\ell}{\sqrt{k} + 1}$. Требуемое получено.

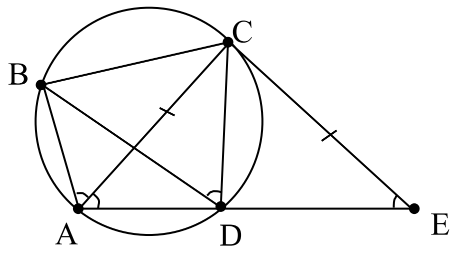
9.2 Даны два треугольника. Сумма двух углов первого равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого также равна некоторому углу второго. Докажите, что первый треугольник − равнобедренный.

Решение. Пусть α, β, γ − углы первого треугольника. Пусть $\alpha + \beta$ − это угол второго треугольника. Другая пара углов первого треугольника, скажем, α и γ дает сумму $\alpha + \gamma$. Предположим, что $\alpha + \gamma$ − это угол второго треугольника, отличный от $\alpha + \beta$. Сумма двух углов в треугольнике меньше π: $\alpha + \beta + \alpha + \gamma < \pi$. Но из первого треугольника имеем $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Полученное противоречие свидетельствует о том, что $\alpha + \beta$ и $\alpha + \gamma$ − это один угол: $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, т.е. $\beta = \gamma$, ч.т.д.

9.3 На продолжении стороны AD вписанного четырехугольника ABCD за точку D отмечена точка E, такая, что $AC = CE$ и $\angle BDC = \angle DEC$. Докажите, что $AB = DE$.

Решение. См. рис.

Пусть $\angle DEC = \varphi$. Тогда $\angle DAC = \varphi$, т.к. по условию треугольник ACE − равнобедренный. Угол BAC также равен φ (вписанные углы BAC и BDC опираются на одну дугу). Кроме того, $\angle ABC = \angle CDE$, так как оба они в сумме с углом ADC дают 180°. Значит, треугольники ABC и EDC равны (по стороне и двум углам). Следовательно, $AB = ED$. Ч.т.д.



9.4 По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Цепочкой назовем несколько чисел (возможно, одно), стоящих подряд. Найдите количество цепочек, сумма чисел в которых положительна.

Ответ: 4951

Решение. Разобьем все цепочки (кроме цепочки, состоящей из всех чисел) на пары дополняющих друг друга. Если сумма чисел в одной из цепочек пары равна s, а во второй равна t, то $s + t = 1$. Поскольку числа s и t целые, то положительным из них является ровно одно. Значит, ровно половина всех цепочек имеет положительную сумму. Всего цепочек $100 \cdot 99$ (две дополняющие друг друга цепочки определяются выбором двух мест между ними). Это дает нам 4950 цепочек с положительной суммой. Добавим к ним еще цепочку из всех чисел.

9.5 Квадрат натурального числа a при делении на натуральное число n дает в остатке 8. Куб числа a при делении на n дает в остатке 25. Найдите n.

Ответ: $n = 113$

Решение. Заметим, что число $x = a^6 - 8^3 = (a^2)^3 - 8^3 = (a^2 - 8)(a^4 + 8a^2 + 64)$ делится на n. Также заметим, что число $y = a^6 - 25^2 = (a^3)^2 - 25^2 = = (a^3 - 25)(a^3 + 25)$ делится на n. Тогда на n делится разность $x - y = (a^6 - 8^3) - (a^6 - 25^2) = 625 - 512 = 113.$ Число 113 − простое, оно имеет только два делителя: 1 и 113. Так как по условию $n > 25$, то $n = 113$.