9 класс

1. Сумма факториалов первых k натуральных чисел равна квадрату суммы первых n натуральных чисел.

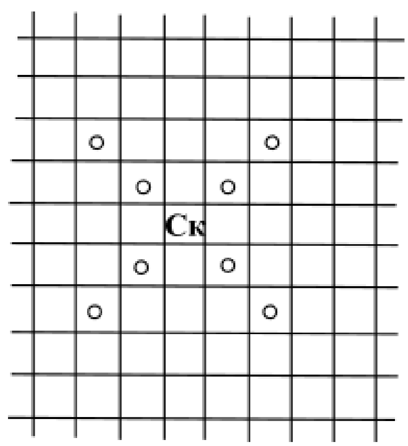
а) Найдите все такие пары (k, n) (3 балла);

б) докажите, что других пар, кроме найденных в пункте а), нет (4 балла).

(*Для справки:* Факториал натурального числа m – произведение всех чисел подряд от 1 до m. Обозначается $m!$. Например, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. По определению, $1! = 1$)

Решение. Очевидно, годятся пары $(1, 1)$ и $(3, 2)$: $1! = 1^2 = 1$ и $1! + 2! + 3! = (1 + 2)^2 = 9$. Докажем, что других подходящих пар нет. При $k = 2$ будет $1! + 2! = 3$ – это не является квадратом целого числа. При $k = 4$ будет $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ – тоже не квадрат. При $k \geqslant 5$ дальнейшие слагаемые в сумме факториалов все оканчиваются на 0. Поэтому сумма факториалов первых k натуральных чисел оканчивается на цифру 3 при $k \geqslant 4$. Но полный квадрат не может заканчиваться на 3. Поэтому при $k \geqslant 4$ решений нет.

2. Фигура «слоник» бьет на одну или две клетки по диагонали клетчатой доски. Какое максимальное количество слоников, не бьющих друг друга, можно расставить в клетках доски 10×10?



Решение. Ответ: 40 слоников. На доске 10×10 есть всего 19 диагоналей, проведенных в одном направлении. Разобьем каждую диагональ на тройки подряд идущих клеток (возможно, одна из троек на диагонали неполная). В диагоналях длиной 1, 2 или 3 (их всего 6) будет по одной тройке. В диагоналях длиной 4, 5 или 6 клеток (их всего 6) – по две тройки. В диагоналях длиной 7, 8 или 9 (их всего шесть) – по три тройки. В единственной диагонали длиной 10 клеток будет 4 тройки. Всего троек по всем диагоналям $6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 40$. Если два слоника окажутся в одной тройке, то они будут бить друг друга. Поэтому слоников, не бьющих друг друга, не больше, чем троек. То есть, не больше 40.

Пример на 40 слоников – целиком заполненные 1-я, 4-я, 7-я и 10-я горизонтали.

3. Есть кучка из 100 спичек. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Петя может своим ходом взять одну, три или четыре спички. Вася может своим ходом взять одну, две или три спички. Кто не может сделать хода, тот проиграл. Кто из игроков, Петя или Вася, может выиграть при любой игре соперника?

Решение. Ответ: выиграть может только Вася. Вася, например, может в результате своего хода всегда делать остаток от деления на 3 количества оставшихся в кучке спичек равным 2. Если в результате спичек в кучке ровно 2, то Петя берет одну и проигрывает следующим ходом. Если же в результате спичек 5 или больше, то Вася еще не сделал последний ход (за ближайший ход Пети уйдет не более 4 спичек).

4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки P, Q, R и S так, что $BP : AB = CR : CD = 1 : 3$ и $AS : AD = BQ : BC = 1 : 4$. Докажите, что отрезки PR и QS делятся точкой их пересечения в отношениях $1 : 3$ и $1 : 2$.

Решение. Рассмотрим вспомогательный параллелограмм $ABCD_1$. Можно считать, что точки D и D_1 не совпадают (иначе утверждение задачи очевидно). Возьмём на сторонах AD_1 и CD_1 точки S_1 и R_1 так, что $SS_1||DD_1$ и $RR_1||DD_1$. Пусть N – точка пересечения отрезков PR_1 и QS_1; N_1 и N_2 – точки пересечения прямой, проходящей через N параллельно DD_1, с отрезками PR и QS соответственно. Тогда $N_1N = \frac{1}{4}RR_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}DD_1$ и $N_2N = \frac{1}{3}SS_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}DD_1$. Поэтому $N_1 = N_2$ – точка пересечения отрезков PR и QS. Ясно, что $PN_1 : PR = PN : PR_1 = 1 : 4$ и $QN_2 : QS = 1 : 3$.

5. В турнире по настольному теннису каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один судья. Все судьи судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные судьи. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибся?

Решение. Ответ: нет. Пусть никто из троих не ошибся и пусть количество игроков равно n. Упорядочим судей по возрастанию количества встреч, которые они судили. Тогда первый судья судил не менее оной встречи, второй – не менее двух и т.д. Так как все встречи Иванова судили разные судьи, количество судей не меньше $(n-1)$. Поскольку в турнире всего $1+2+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ встреч, количество судей в действительности равно $(n-1)$ и они судили, соответственно, $1, 2, \ldots, (n-1)$ встреч. Значит, все судьи судили встречи Иванова. Поэтому одну из его встреч судил судья, судивший только одну встречу. По тем же причинам он судил одну из встреч Петрова, а также одну из встреч Сидорова. Но в единственной встрече, которую он судил, участвовали только два игрока – противоречие.