
9.1. Решить уравнение:

$$\left(x^2-20\right)^2+\left(x^2-19\right)^2=2019.$$

Решение. Пусть $x^2-20=y$; тогда $y^2+y-1009=0$ ($D=4037$) и $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{4037}}{2}$. Для меньшего из корней обратная подстановка приводит к условию $x^2<0$ (нет решений), больший из корней дает

Ответ: $x=\pm\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{4037}}{2}}$.

9.2. Трудновоспитуемые девятиклассники Вова и Дима порвали школьную стенгазету с критикой их поведения, прилежания и культуры речи. Причем, каждый попавший в его руки кусок газеты Вова рвал на 7 кусков, а Дима только на 4 (его критиковали меньше). Потом школьная уборщица собрала 2019 мелких обрывков газеты. Доказать, что она нашла не все обрывки.

Решение. При всех операциях число обрывков газеты увеличивается на 6 или на 3, поэтому остаток деления на 3 общего числа обрывков в любой момент времени сохраняется. Перед началом процесса (когда газета была целой) этот остаток равнялся 1. Число 2019 при делении на 3 дает нулевой остаток, поэтому хотя бы 1 обрывок был не найден.

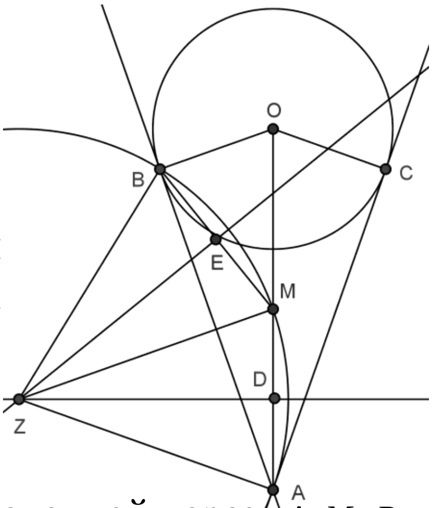
9.3. Известно, что $ad>bc$, а также $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$. Доказать, что тогда

$$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}.$$

Решение. Второе из данных неравенств приведем к виду $\dfrac{ad-bc}{bd}>0$, откуда, с учетом первого, $bd>0$, тогда $bd+b^2>0$ и $bd+d^2>0$. Левая часть двойного неравенства приводится к виду $\dfrac{ad-bc}{bd+b^2}>0$ – верно. Аналогично доказывается правая часть двойного неравенства.

Решения задач олимпиады по математике в 2019-2020 учебном году
9 класс

9.4. Из точки A провели касательные к окружности с центром в точке O: B и C – точки касания. Точка M – середина отрезка AO. Доказать, что окружность, описанная около треугольника AMB, касается прямой AC.



Решение. Z – центр окружности, проведенной через точки A, M, B – пересечение серединных перпендикуляров к AM и BM; D, E – основания перпендикуляров; т.к. M – середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABO, то $AM = BM$,

$\angle AZD = \angle DZM = \angle MZE = \angle EZB$, $\angle CAM = \angle MAB = \frac{1}{2}\angle MZB$,

$\angle CAM = \angle AZD$, $\angle CAM + \angle MAZ = \angle AZD + \angle DAZ = \frac{\pi}{2}$, т.е.

$CA \perp ZA$, и прямая CA касается окружности, проведенной через A, M, B.

9.5. В парламент островного государства Променад-и-Торнадо были избраны 2019 коренных жителей острова, которые делятся на рыцарей и лжецов: рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. На первом заседании 2016 из них сели в депутатские кресла, расположенные в зале в виде прямоугольника 42×48, трое – в кресла председателя и его заместителей в президиуме. Во время заседания каждый заявил, что среди его соседей по креслу есть и рыцари, и лжецы (соседи – те, кто сидят слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям: их может быть от 3 до 8 в зале и 1 или 2 в президиуме). Определить минимальное число лжецов на заседании.

Решение. Если в зале соседствуют два лжеца, то весь зал заполняют одни лжецы, но это соответствует максимальному числу лжецов в зале. При минимальном числе лжецов каждый лжец соседствует только с рыцарями. Прямоугольник 42×48 можно замостим 224 квадратами 3×3. Минимальное число лжецов в каждом таком квадрате – 1 (иначе – если в квадрате все рыцари – то центральный рыцарь солгал). Таким образом, минимальное число лжецов в зале – 224 (в центрах квадратов 3×3). В президиуме – одни лжецы (трое).

Ответ: 227.