Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

9 класс

9-1. Почтальон Печкин подсчитал, что половину пути он шел пешком (скорость 5 км/ч), и только треть времени – ехал на велосипеде (скорость 12 км/ч). Не ошибся ли он в расчетах?

Ответ. Ошибся.

Решение. Обозначим весь путь Печкина через $2S$ км. Тогда пешком он прошел путь S км и потратил на это S / 5 = 0,2 S (часов). По условию, это составило 2/3 всего потраченного времени, то есть весь путь занял $0{,}2S$: 2/3 = $0{,}3S$ (часов), а на велосипеде он ехал $0{,}1S$ часов. Тогда его скорость должна составить $S/(0{,}1S)$ = 10 (км/ч).

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

9-2. Школьная волейбольная команда провела несколько матчей. После того, как она выиграла очередной матч, доля побед стала на величину 1/6 больше. Чтобы увеличить долю побед ещё на 1/6, волейболистам пришлось выиграть ещё два матча подряд. Какое минимальное число побед нужно одержать команде, чтобы доля выигрышей увеличилась ещё на 1/6?

Ответ. 6.

Решение. Пусть в начале команда провела n матчей, из которых k выиграла. Тогда после очередного выигрыша доля побед увеличилась на $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{1}{6}$. Аналогично после ещё двух побед прирост составил $\frac{k+3}{n+3} - \frac{k+1}{n+1} = \frac{1}{6}$. Упрощая каждое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} n - k = \dfrac{n(n+1)}{6} \\ 2(n - k) = \dfrac{(n+1)(n+3)}{6} \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получаем, что $\frac{n+3}{n} = 2$, откуда, n = 3. Подставляя это значение в первое уравнение найдем, что k = 3 – 3·4/6 = 1. Значит, к началу событий доля побед была 1/3, после очередной победы – 2/4, после ещё двух команда одержала 1 + 1 + 2 = 4 победы в 3 + 1 + 2 = 6 играх. Если команда одержит ещё m побед, то их доля составит $\frac{4+m}{6+m}$, что должно совпасть с $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Решая соответствующее уравнение получаем, что m = 6.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Составлена система уравнений – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

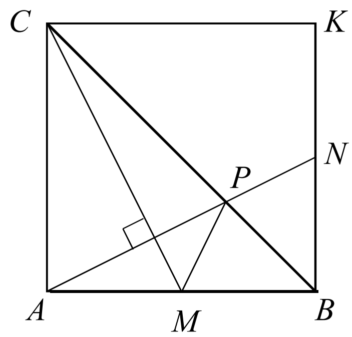
9-3. Можно ли среди чисел $2^{2^n} + 1$, n = 0, 1, 2, …, найти хотя бы один куб целого числа?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что существуют такие натуральные числа k и n, что $2^{2^n} + 1 = k^3$. Тогда k — нечётное, и $2^{2^n} = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$. Значит, $k - 1 = 2^s$ и $k^2 + k + 1 = 2^t$, где s и t — некоторые натуральные числа. Теперь имеем $2^{2s} = (k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$ и $2^t - 2^{2s} = 3k$. Но число $2^t - 2^{2s}$ — чётное, в то время как $3k$ — нечётное, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что числа $k - 1$ и $k^2 + k + 1$ — степени двойки, — 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

9-4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90°, точка M — середина AB. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная CM, пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMP$.



Решение. Достроим равнобедренный прямоугольный треугольник до квадрата $ABKC$ (см. рис.). Пусть N — точка пересечения AP и BK. Прямые CM и AN взаимно перпендикулярны, поэтому $\angle AMC = \angle BNA$. Отсюда следует равенство прямоугольных треугольников MAC и BNA, и значит, $AM = BN$. Так как $MB = BN$ и $\angle MBP = \angle P\,BN = 45°$, то треугольники MBP и NBP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle BMP = \angle BNP$; и так как $\angle BNP = \angle BNA = \angle AMC$, требуемое равенство доказано.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

9-5. На доске записан пример на умножение двух трехзначных чисел. Если вместо знака умножения написать 0, получим семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

Ответ. В 73.

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Тогда указанное семизначное число будет иметь вид $10000a + b$, по условию $10000a + b = nab$, откуда $b = \frac{10000}{na-1}$.

Заметим, что числа a и $na - 1$ не имеют общих делителей, так что $na - 1 = p$ – делитель 10000. Кроме того, $nab \geq 10000a$, то есть $nb \geq 10000$, $n \geq 10000/999 > 10$. Значит, $n \geq 11$, $p \geq 1099$, то есть надо проверить значения p равные 10000, 5000, 2500, 2000, 1250 и искать те из них, для которых $p + 1$ раскладывается на двузначный (n) и трехзначный (a) делители.

Пусть $p = 10000$, имеем $10001 = 73\cdot137$, тогда $n = 73$, $a = 137$, $b = 10000\cdot a/p = a$.

Пусть $p = 5000$, $5001 = 3\cdot1667$, число 1667 – простое; трехзначных делителей нет.

Пусть $p = 2500$, $2501 = 41\cdot61$, нет трехзначных делителей.

Пусть $p = 2000$, $2001 = 3\cdot23\cdot29$. В силу того, что $n \geq 11$, подходит значение не менее 23, но тогда $a \leq 3\cdot29 = 87$ двузначно.

Пусть $p = 1250$, $1251 = 3\cdot417$, число 417 – простое. Нет разложения на двузначное и трехзначное числа.

Итак, остается только вариант $n = 73$. Действительно, $1370137 / 73 = 18769 = 137\cdot137$.

Критерии. Только ответ – 1 балл, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но перебор неполный или необоснованный – 5 баллов.