Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2019-2020 учебный год

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

9 класс

1. Ответ**:** тех и других квадратных трёхчленов поровну.
   Решение. Из условия на коэффициенты следует, что рассматриваемых квадратных трёхчленов конечное число. Разобьём это множество квадратных трехчленов на пары: $x^2 + 2mx + n^2$ и $x^2 + 2nx + m^2$. Эти трехчлены имеют дискриминанты $m^2 - n^2$ и $n^2 - m^2$. Так как m и n различные натуральные числа, то дискриминант не может равняться нулю и, поэтому, если один из них имеет корни, то другой не имеет корней. Таким образом, их поровну.

   Критерий. Обоснованный ответ – 7 баллов; ответ без пояснений – 0 баллов.

2. Ответ: нет.
   Первое решение. Назовем пару чисел, сумма которых равняется простому числу, хорошей. Так как сумма двух различных натуральных чисел не может равняться 2, то сумма чисел в хорошей паре есть нечетное простое число. Поэтому в каждой хорошей паре одно число четное, а другое нечетное. Число 1 образует хорошие пары с числами 2, 4, 6; число 2 – с числами 1, 3, 5, 9; число 3 – с 2, 4 и 8; число 4 – с 1, 3, 7, и 9; число 5 – с 2, 6 и 8; число 6 – с 1, 5, 7; число 7 – с 4 и 6: число 8 – с 3, 5, 9; число 9 – с числами 2, 4 и 8. Из приведенного списка видно, что в центральной клетке квадрата 3 на 3 может быть расположено только одно из чисел 2 или 4, каждое из которых входит в четыре различные хорошие пары. Причем в четырех соседних клетках, в этом случае, будут расположены нечетные числа. Но тогда пятое нечетное число нельзя будет расположить ни в одну из угловых клеток, так как его соседями будут нечетные числа, а, следовательно, их сумма не будет простым числом.
   Второе решение. Среди натуральных чисел от 1 то 9 пять нечетных и 4 четных числа. Поскольку числа одной четности не могут быть в соседних клетках, то в центральной клетке должно быть расположено нечетное число. Но ни одно нечетное число не образует 4 хорошие пары.

   Критерий. Обоснованный ответ – 7 баллов; замечено, что в центральной клетке не может стоять четное число – 2 балла; рассмотрены отдельные примеры – 0 баллов.

3. Ответ; Ваня, Петя, Олег.

   Решение. В начале заметим, что если два участника четное число раз менялись местами друг с другом, то они финишировали в том же порядке, в котором стартовали, а если нечетное число раз, то в обратном порядке. Положение, когда участники забега меняются местами, назовем обгоном. В каждом обгоне участвуют два участника, поэтому суммарное число обгонов, совершенных всеми участниками забега будет четным. Так как у Олега четное число, а у Пети нечетное число, то у Вани – нечетное число обгонов. Поскольку Ваня стартовал после Пети, а финишировал раньше, то Ваня с Петей участвовали в нечетном числе обгонов друг с другом. Тогда каждый из них участвовал четное число раз в обгонах с Олегом. Следовательно, Олег финишировал и позже Вани, и позже Пети.

Замечание. Без заключения о том, что и Ваня, и Петя участвовали в четном числе обгонов с Олегом, нельзя сделать вывод, что Олег финишировал последним. Четное число обгонов у Олега могло получиться и в случае, когда он нечетное число обгонов совершил с каждым из них, и тогда он финишировал бы первым. В этом случае и у Вани, и у Пети должно было быть четное число обгонов, что противоречит условию задачи.

Критерии. Обоснованный ответ – 7 баллов; нет обоснования, что Олег финишировал последним – не более 4 баллов; верный ответ без обоснования – 1 балл.

4. Ответ: 999609.

   Решение. Наибольшее пятизначное число, кратное 17 равно 99994. Но чисел кратных 19 среди шестизначных чисел от 999940 до 999949, полученных приписыванием цифры к числу 99994, нет. Следующее пятизначное число кратное 17 – это 99977. И в этом случае среди шестизначных чисел от 999770 до 999779 нет чисел кратных 19. А вот для следующего пятизначного числа 99960, кратного 17, имеется шестизначное число 999609, кратное 19. Оно и будет наибольшим.

   Замечание. Можно вести поиск начиная с наибольшего шестизначного числа, кратного 19. В этом случае потребуется 20 шагов вместо трех рассмотренных.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; за отсутствие проверки верных утверждений о делимости или не делимости чисел – баллы не снимаем; за неполный перебор с верным ответом – 4 - 5 баллов.

5. *Решение*. Рассмотрим треугольник ACD. Поскольку $\angle ADC = 60^0$, то сумма двух других $\angle ACD + \angle CAD = 120^0$. По условию $AD > DC$, и так как против большего угла лежит большая сторона, то $\angle ACD > \angle CAD$, а это значит, что больший угол $\angle ACD > 60^0 = \angle ADC$. Следовательно, $AD > AC = BC$, и $AD + DC > AC + DC = BC + CD > BD$.

   Критерии. Обоснованное доказательство неравенства – 7 баллов; найдено соотношение для углов треугольника ACD – 3 балла.