Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2019/20 учебный год

9 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – корни нашего трёхчлена. Тогда из теоремы Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждое из выражений в скобках не равно 1, – 1 или 0, т. е. число $a + b + 1$ составное.

2. УСЛОВИЕ

Докажите, что при всех положительных x, y, z выполняется неравенство $x^2/y + y^2/z \geq 4(x - z)$.

Доказательство. Докажем, что при $x, y > 0$ выполняется неравенство $x^2/y \geq 4(x - y)$. Действительно, домножим обе части неравенства на y: $x^2 \geq 4(xy - y^2)$ или, что то же самое, $(x - 2y)^2 \geq 0$. Теперь, сложив неравенства $x^2/y \geq 4(x - y)$ и $y^2/z \geq 4(y - z)$, мы получим требуемое неравенство.

3. УСЛОВИЕ

Имеется неограниченное число фишек шести цветов. Какое наименьшее число фишек нужно расположить в ряд так, чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние фишки этих цветов?

Решение. Из условия следует, что для каждого фиксированного цвета А фишка этого цвета должна встретиться в паре с фишкой каждого из остальных 5 цветов. В ряду фишка имеет не более двух соседей, поэтому фишка цвета А должна встретиться не менее 3 раз. Аналогично с каждым другим цветом. Таким образом, всего должно быть не менее $3 \cdot 6 = 18$ фишек. Вот один из примеров искомого расположения фишек: 123456246325164135.

Ответ. 18 фишек.

4. УСЛОВИЕ

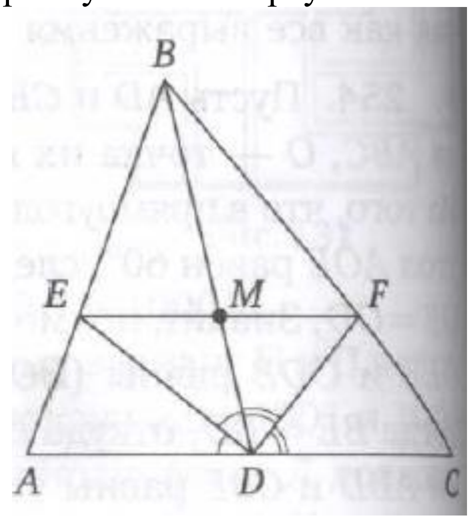
В плоскости расположены n одинаковых зубчатых колёс так, что первое сцеплено зубцами со вторым, второе – с третьим и так далее, наконец, последнее n-е колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

Решение. Два любых соседних колеса вращаются в противоположном направлении, значит, первое и последнее колёса также имеют противоположные направления вращения, что возможно тогда и только тогда, если число колёс чётно. Итак, колёса такой системы могут вращаться, если число колёс чётно, и не могут в противном случае.

5. УСЛОВИЕ

Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, а отрезки DE и DF – биссектрисы треугольников ABD и CBD. Отрезки BD и EF пересекаются в точке M. Докажите, что $DM = EF/2$.

Доказательство. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Значит, $EF \parallel AC$, откуда следует, что $EM : MF = AD : DC = 1 : 1$, т.е. DM – медиана треугольника EDF. Но $\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = \frac{1}{2} \angle ADB + \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle CDB) = 90^0$. Таким образом, $DM = EF/2$ по свойству медианы прямоугольного треугольника.



6. УСЛОВИЕ

На столе лежит 2001 монета. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За ход первый может взять со стола любое нечётное число монет от 1 до 99, второй – любое чётное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? Ответ обоснуйте.

Решение. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом, если второй берет x монет, первый должен взять $101 - x$ монет. Он всегда может это сделать, потому что если x – чётное число от 2 до 100, то $(101 - x)$ – нечётное число от 1 до 99. Так как $2001 = 101 \cdot 19 + 81 + 1$, через 19 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

Ответ. Выигрывает первый.