

# Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2019 г.)

## 10 класс

1. Каждая сторона треугольника  $ABC$  разделена на 3 конгруэнтных отрезка. Точки деления, прилежащие к вершинам углов (по одной на каждой стороне) соответственно соединены с вершинами противоположащих углов. Какую часть площади треугольника  $ABC$  составляет площадь образовавшегося внутреннего треугольника?

2. Докажите, что система не имеет целочисленных решений:

$$\begin{cases} x^2 + y^5 = 11, \\ z^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

3. Построив сечение куба плоскостью, проходящей через середины  $M$ ,  $H$  и  $P$  попарно скрещивающихся ребер, найдите площадь сечения, если ребро куба равно  $a$ ?

4. Постройте график функции

$$y = \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}.$$

5. Бригада строителей состояла из каменщиков, штукатуров, печников и разнорабочих (без специальностей). Все печники являлись каменщиками. Среди тех каменщиков, которые являлись еще и печниками, нет ни одного, который не был бы еще и штукатуром. Все те каменщики, которые были еще и штукатурами, оказались к тому же еще и печниками. Кроме того, известно следующее:

- 1) рабочих, владевших только одной специальностью, столько же, сколько разнорабочих;
- 2) сумма удвоенного числа тех рабочих, которые были только штукатурами, и утроенного числа тех рабочих, которые были только каменщиками, равна 15;
- 3) число рабочих, владевших только специальностью каменщика, было в пять раз меньше, чем сумма числа 9 и утроенного числа рабочих, которые владели всеми специальностями.

Сколько рабочих было в бригаде?