

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике  
2019-2020 учебный год**

**10 класс**

1. У Пети имеется несколько гирь, каждая из которых весит целое число граммов меньше 10. Может ли оказаться, что этими гирями нельзя набрать веса в 101 и 105 г, а в 100, 102, 103 и 104 г – можно?
2. Для натуральных чисел  $a, b, c$  и  $d$  выполняется равенство  $a^a + b^b = c^c + d^d$ . Докажите, что среди них есть равные друг другу числа.
3. На доске написано некоторое нецелое число, больше 1. С ним проделывают следующую операцию: делят на его дробную часть, результат записывают на доску, а старое число стирают. Докажите, что в некоторый момент на доске появится целое число или число, которое больше 1000000. (Дробная часть числа  $x$ , это разность между  $x$  и ближайшим целым числом, не превосходящим  $x$ )
4. В треугольнике  $ABC$  углы при вершинах  $B$  и  $C$  равны  $40^\circ$ ,  $BD$  – биссектриса угла  $B$ . Докажите, что  $BD + DA = BC$ .
5. В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили  $K$  клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что  $K \geq 100$ .