

Всероссийская олимпиада школьников 2019/2020 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин.

Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Задание 11.1

$P(x)$ и $Q(x)$ – приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Количество баллов 7

Задание 11.2

Пусть $S(n)$ сумма цифр числа n . Найдите все n , для которых $n + S(n) + S(S(n)) + \dots + S(S(\dots S(n)\dots)) = 2000000$ (здесь в сумме n слагаемых, а в каждом слагаемом на одну итерацию функции S больше, чем в предыдущем слагаемом).

Количество баллов 7

Задание 11.3

Доказать, что для любого натурального числа n выполнено неравенство:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n} - \frac{3}{2}$$

Количество баллов 7

Задание 11.4

Пусть M и N – середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Внеписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q , а прямой AC – в точке P . Докажите, что точки P , Q и N лежат на одной прямой.

Количество баллов 7

Задание 11.5

Король обошёл шахматную доску, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна единице.)

Количество баллов 7