

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019-2020 учебный год

11 класс

1. Существуют ли такие натуральные a и b , что $a + b^2 = \text{НОК}(a, b)$?

2. Уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a , b и c отличны от нуля, имеет решение.

Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$.

3. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K .
Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L . Докажите, что $BL = KC$.

4. На окружности отмечены 40 точек и нарисованы 5 треугольников с вершинами в этих точках.
Треугольники не пересекаются, в том числе не имеют общих вершин. Докажите, что можно нарисовать еще один треугольник так, чтобы он не имел общих точек с уже нарисованными треугольниками.

5. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ образуется следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \quad (n \geq 3).$$

Доказать, что все числа в последовательности — целые.