САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

16 ноября 2019 г. I тур 11 класс 1 вариант

1. Угол $\alpha \in [0, \pi]$ и числа a, b (не равные нулю одновременно) таковы, что число $\sin\alpha$ является корнем уравнения

$$2ax^2 + bx - 2a = 0,$$

а число $\cos\alpha$ — корнем уравнения

$$2ax^2 + bx - 2b = 0.$$

При каких α это может быть?

2. Через ребро AB тетраэдра $ABCD$ проведены две плоскости. Каждая из них образует равные углы с плоскостями ABC и ABD. Одна из них проходит через середину ребра CD. Докажите, что вторая плоскость параллельна ребру CD.

3. Число, не превосходящее миллиона, поделили с остатком на 96, 97, 98 и 99. Какое наибольшее значение может быть у суммы полученных остатков?

4. Даны числа a, b и c, большие 1. Числа x, y, z удовлетворяют условиям $a^x = b^y = c$, $a^z + b^z = 2c$. Докажите, что $2z \leqslant x + y$.

5. На ферме живет 10 человек (2 ноги, 1 голова), а также куры (2 ноги, 2 крыла, 1 голова), овцы (4 ноги, 1 голова) и пегасы (4 ноги, 2 крыла, 1 голова). Однажды на выпас отправились несколько жителей фермы. Оказалось, что на выпас ушли $1/3$ всех голов, $1/4$ всех крыльев и $1/5$ всех ног. Докажите, что на ферме живет не больше 20 овец.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите следующие данные:

Фамилия, имя; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и http://anichkov.ru/page/olimp/

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

16 ноября 2019 г. I тур 11 класс 2 вариант

1. Угол $\alpha \in [0, \pi]$ и числа c, d (не равные нулю одновременно) таковы, что число $\sin\alpha$ является корнем уравнения

$$2cx^2 - dx - 2c = 0,$$

а число $\cos\alpha$ — корнем уравнения

$$2cx^2 + dx + 2d = 0.$$

При каких α это может быть?

2. Через ребро BC тетраэдра $ABCD$ проведены две плоскости. Каждая из них образует равные углы с плоскостями ABC и BCD. Одна из них параллельна ребру AD. Докажите, что вторая плоскость проходит через середину ребра AD.

3. Число, не превосходящее миллиарда, поделили с остатком на 994, 995, 996 и 997. Какое наибольшее значение может быть у суммы полученных остатков?

4. Даны числа a, b и c, большие 1. Числа x, y удовлетворяют условиям $a^x = b^y = c$, $z = (x + y)/2$. Докажите, что $c \leqslant (a^z + b^z)/2$.

5. На Острове доктора Моро живут 20 человек, а также ослы (1 голова, 1 хвост), драконы (3 головы, 1 хвост) и генно-модифицированные хомяки с тремя головами и без хвоста. Однажды половина всех обитателей острова исчезла в джунглях. Оказалось, что тем самым исчезла треть всех хвостов и четверть всех голов. Докажите, что до исчезновения на острове было не более 20 хомяков.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите следующие данные:

Фамилия, имя; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и http://anichkov.ru/page/olimp/