

Задачи муниципального этапа ВсОШ по математике
2019 - 2020 учебный год
11 класс

11.1. Число a таково, что параболы $y = x^2 + ax + 1$, $y = x^2 + x + a$ и $y = x^2 + 3$ различны и пересекаются в одной точке. Каким может быть a ?

11.2. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = 1, \\ \sin \alpha + \sin \beta = a. \end{cases}$$

Докажите, что $a \leq \sqrt{3}$.

11.3. Клетки доски 2019×2019 раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, что угловые клетки – черные. Для каждой пары разноцветных клеток рисуется вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Докажите, что сумма всех нарисованных векторов равна нулю.

11.4. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ площади всех четырёх боковых граней равны. Плоскость α пересекает рёбра SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 так, что у пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ площади двух соседних боковых граней равны. Докажите, что и площади двух других боковых граней этой пирамиды также равны.

11.5. Два игрока играют в следующую игру на доске $m \times n$ клеток ($m, n > 1$). У них есть белый и чёрный король соответственно, стоящие в противоположных углах доски. Они передвигают своих королей (по правилам шахмат) поочередно так, чтобы расстояние между центрами клеток, на которых стоят короли, уменьшалось (королям разрешается занимать соседние клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?