

Дорогие ребята!

Поздравляем Вас с участием в муниципальном этапе всероссийской олимпиады школьников по математике! Выполняя задания, не спешите, так как ответы не всегда очевидны и требуют применения не только математических знаний, но и общей эрудиции, логики и творческого подхода. Во время олимпиады категорически запрещается пользоваться мобильными телефонами.

На выполнение заданий отводится 4 часа.

Успеха Вам в работе!

1. Можно ли в равенстве $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 20$ вычеркнуть из левой части один множитель, а из правой – несколько так, чтобы получилось верное равенство?
2. Числа a и b – длины катетов, c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что $a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4$.
3. Центр города представляет из себя квадрат 5×5 км, состоящий из 25 кварталов размером 1×1 км, границы которых – улицы, образующие 36 перекрестков. Какое наименьшее количество полицейских необходимо поставить на перекрестках так, чтобы до каждого из перекрестков какой-то из полицейских мог бы добраться, проехав на машине не более 2 км?
4. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекают описанную окружность в точках K и L соответственно. Отрезки AK и BL пересекаются в точке X и делятся этой точкой в равных отношениях считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
5. В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке – по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?